فلسفة الرياضة

الدكتور محمد ثابت الفندى
الأستاذ بجامعة الأسكندرية

١٩٨٧

دار المعرفة الجامعية
٤٠ شارع سوتير - اسكندرية

فلسفة الرياضة

فلسفة الرياضة

الدكتور محمد ثابت الفندى
الأستاذ بجامعة الأسكندرية

١٩٨٧

دار المعرفة الجامعية
٤٠ شارع سوتر - اسكندرية

الإهداء

إلى طلابي بجامعة بيروت العربية

أهدي هـــذه الدراسة

م. ث. الهندي

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم
وبه نستعين
والصلاة والسلام على سيد المرسلين .

وبعد فهذه فيما أعلم أول دراسة بالعربية في موضوع جليل شغل الفكر الغربي طويلاً وما زال يشغله وهو موضوع «أسس الرياضة» على حد اصطلاح الرياضيين أو « فلسفة الرياضة » كما اصطلح الفلاسفة والمتفلسفون من الرياضيين .

والكتب الغربية الكثيرة في هذا الموضوع تعانى إما من السطحية وإما من التعقيد الفني . والعرض السطحي يشوه ولا ريب المسألة العلمية ويفقدها قيمتها . أما التعقيد الفني فأمر يهم الرياضيين . ولذلك فان هذه الدراسة التي أخص بها الفلاسفة قبل غيرهم كان لابد أن تتحاشى الجوانب الفنية البحتة كما يعرضها الرياضيون في أبحاثهم، وكان لابد أن توطىء المسائل على النحو الذي اتبعته هنا .

فإلى قراء الفكر المعاصر أقدم هذه الخلاصة في فلسفة الرياضة .

الدكتور محمد ثابت الفندي

الفصل الأول

تمهيد في فلسفة العلوم

(١) الصلة بين العلوم والفلسفة . (٢) حركات النقد الذاتي في العلوم وفلسفة العلوم . (٣) المنهج الذي اتبعناه في عرض فلسفة الرياضة .

– (١) –

هناك دائماً صلة وثيقة بين العلوم والفلسفة : وفي الفكر القديم حينما كانت العلوم أجزاء من الحكمة أو الفلسفة لم تكن الصلة صلة جزء بكل فحسب وانما كانت فوق هذا صلة اهتمام من الفلسفة الأولى بتحليل أو تبرير المبادىء والمسلمات التي تقوم عليها العلوم .

وفي الفكر الحديث بعد أن استقلت العلوم شيئاً فشيئاً عن أمها الفلسفة ظلت تلك الصلة قائمة ولو من طرف واحد ، أعني من جهة الفلسفة وحدها التي عنيت في نطاق اهتماماتها المنطقية بالتعرف إلى مناهج العلوم أو طرائق التفكير التي كفلت للعلوم تقدماً مطرداً بعيداً عن الفلسفة وطرقها ومنطقها . فنشأ بذلك في أحضان الفلسفة فرع من الدراسات المنطقية غير مسبوق سمي مناهج العلوم (Methodology) .

وفي الفكر المعاصر تجاوزت الصلة بين العلوم والفلسفة تلك الحدود الضيقة التي عبرت عنها فكرة مناهج العلوم .

فلقد نشأت في العلوم نفسها وخاصة المتقدمة منها حركات نقد ذاتي لبنائها العلمي من داخله لاختبار الأفكار والمبادىء أو الأسس التي يقوم عليها البناء وبيان الارتباط بينها وبين قضايا العلم ونظرياته المشتقة منها . فقدمت بذلك العلوم نفسها المشاكل التي تواجهها والموضوعات التي تثيرها، الى الفلسفة التي وظيفتها الدائمة أيضاً نقد المعرفة المتكونة في أنساق علمية بتحليل البناء العلمي للوقوف على حقيقة الأسس التي يقوم عليها وطبيعتها وقيمتها فظهر بذلك مرتبطاً بحركات نقدية في العلم ما يسمى اليوم « فلسفة العلوم » Philosophy of Sciences التي هي الآن ملتقى الباحثين من المعسكرين العلمي والفلسفي ومجال التعاون المثمر بين العلماء والفلاسفة ، وتقهقرت تبعاً لذلك عبارة مناهج العلوم فلم تعد تظهر إلا في الكتب الطلابية . وربما أصبح استعمالها اليوم بالنسبة إلى العلوم المتقدمة لا مضمون له لأنها توهم بدراسة الطرق التي يمارسها العلماء فعلاً في علومهم المختلفة وهذا بالطبع لا يفيد العلماء أنفسهم شيئاً جديداً لم يكونوا على علم به من قبل، كما لا يفيد الفلاسفة من حيث أنهم يرفضون قطعاً أن تكون الفلسفة علماً على غرار تلك العلوم أو أن تتخذ طرقها ، إذ الأمر الهام في هذه الفلسفة ليس البحث عن منهج علمي يحتذى أو يفرض وإنما تحليل البناء العلمي القائم فعلاً إلى عناصره وأسسه ونقد هذه الأسس لنبذ ما لا ضرورة له وتقويم الحقيقة العلمية في نطاق حقائق المعرفة الانسانية .

ولا شك أن فلسفة العلوم تتضمن حتماً الأشارة إلى المناهج العلمية . ولكن ما تتضمنه بالأصالة هو الأشارة إلى حركات نقدية هامة تميز الفكر

المعاصر في العلوم القائمة فعلاً عند العلماء أنفسهم للأسس والمبادىء التي تقوم عليها علومهم وإعـادة النظر فيها من جديد بالتحليل وبالضبط المنطقي في ضوء حاجات جديدة للعلم ذاته ، كما تتضمن بالضرورة فوق هذا الاشارة الى مضامين فلسفية بحتة سواء عند الفلاسفة أو عند العلماء وذلك عندما ينتهي البحث الى تحديد طبيعة « الحقيقة » التي يصل اليها العلم وقيمتها وصلتها بغيرها من الحقائق في نطاق نظرية للمعرفة .

-(٢)-

وكما قلنا قد هيأت حركات النقد التي حدثت في داخل بعض العلوم المتقدمة ومن قبل العلماء انفسهم (في الرياضيات والطبيعيات) الى نشأة فلسفة العلوم اصطلاحاً وموضوعاً .

ولقد كانت فلسفة التاريخ أسبق فلسفات العلوم ظهوراً وانتعاشاً منذ أوائل القرن التاسع عشر رغم حداثة دخول علـم التاريخ المرحلة العلمية التي نقلته من معرفة أدبية بقصد العظة والاعتبار الى علم يدخل الدراسات الجامعة بقصد فهم الأحداث وتفسيرها باسبابها الحقيقية . فلقد ظهرت فلسفة التاريخ عند هيجل Hegel في المانيا كمحاولة لتجاوز أحداث التاريخ الغزيرة المختلطة إلى فهم لمنطق العقل الذي أنتجها وهو منطق الجدل الذي ينتقل من النقيض إلى نقيضه ثم إلى مايؤلف بين النقيضين . وتلميذه ماركس رغم قبوله لهذا المنطق لم يقبله جدلاً بين أفكار مجردة للعقل وأنما بين عوامل اقتصادية بحتة ومن ثم جاء الفهم المادي للتاريخ . أما عند معاصرهما الفرنسي أوجست كونت Comte فقد تبلورت نظرته الفلسفية للتاريخ في علـم

جديد أذ اقترح أنه يجب أن يوجد علم الاجتماع الذي عليه أن يبدأ باثبات وقائع خاصة بحياة الإنسان (وهذا هو عمل التاريخ) كما عليه أن يكتشف العلاقات السببية بين تلك الوقائع أي القوانين الاجتماعية (وهذا عمل علم الاجتماع) وبذلك يبدو أن عالم الاجتماع يرفع التاريخ الى مرتبة علم بأن يفكر علمياً في نفس الوقائع التي يتناولها المؤرخ تجريبياً وذلك بربطها بقوانين.

لكن فلسفة التاريخ في القرن العشرين ابتعدت كثيراً عن تلك الأنظار الميتافيزيقية البحتة وأصبحت أكثر وعياً بمشاكل علم التاريخ كعلم وأكثر مقدرة على نقده وتحليله عند أمثال كروتشه Croce في إيطاليا وكولنجوود Collingwood في أنجلترا ودلتاي Dilthey في المانيا .

أما فلسفة الطبيعيات أو فلسفة العلوم الطبيعية (Philosophy of Physical sc. أو Philos. of Natural Sciences) فهي آخر فلسفات العلوم ظهوراً في القرن العشرين رغم أن الاصطلاح نفسه يرجع إلى نيوتن في القرن الثامن عشر حيث كان عنواناً لكتابه في الطبيعيات . وفي الواقع كانت الطبيعيات إلى السنوات الأولى من القرن العشرين واثقة تماماً من خطواتها التي قطعتها مدى قرنين وكان يظن أن اكتشافاتها الهامة قد تمت وأن تقدمها المرتقب بعد ذلك إنما كان في المزيد من الدقة في قوانينها القائمة ، أو على حد تعبير مؤلف أمريكي : « كان في المزيد من دقتها حتى الكسر العشري الرابع بدلاً من الكسر العشري الثالث» . ولكن في العشرينيات من هذا القرن ظهرت نظرية النسبية فتعرضت معها الطبيعيات الكلاسيكية إلى هزة عنيفة دخلت بها ومعها مرحلة النقد الذاتي لأسسها ومبادئها وتصوراتها الجوهرية ، وبالتالي اتجهت وجهة فلسفية أكثر منها علمية تبرر إسهام الفلسفة في نفس المسائل التي أثارها الاتجاه الجديد ، ذلك لأن المسائل التي أثارها

النقد الداخلي للطبيعيات مسائل ذات طبيعة فلسفية عريقة : ما طبيعة الزمان وما طبيعة المكان وما الحركة ؟ كيف يمكن أن تطبق التصورات الهندسية ؟ كيف يصبح أن يكون الزمان بعداً رابعاً ؟ إن عالم الطبيعة الذي يتخذ موقفاً نقدياً من علمه القائم، ويحلل المبادىء والأسس تحليلاً نقدياً ليجيب على مثل هذه المسائل الفلسفية ، يتوقف بالضرورة عن أن يكون عالماً بالطبيعة وحسب إذ يصبح كذلك فيلسوفاً يفلسف أو يقوّم علمه، ويسهم معه الفيلسوف في مناقشة وتحليل تلك المسائل الفلسفية العريقة في قدمها عند الفلاسفة .

ولقد انتعشت فلسفة الطبيعيات بعد ذلك إلى درجة أكبر منذ ظهور الطبيعيات الذرية وما أدت اليه من تساؤلات فلسفية وعلمية متشعبة يمس بعضها الأساس الذي يقوم عليه العلم كله وهو هل هناك في عالم الذرة حتمية مطلقة أم يتسع الأمر إلى قبول نوع من الحرية ؟

أما الرياضيات فقد سبقت اليها الحركة النقدية منذ أوائل القرن الماضي عند الرياضيين أنفسهم وهي مستمرة حتى اليوم .

حقيقة إنه لا يوجد علم أكثر عراقة في تاريخه من الرياضة . فقد دخلت الرياضة مرحلة اليقين العلمي منذ أقدم المفكرين الذين حفظ لنا التاريخ اسماءهم : طاليس وفيثاغور . كما أنه لا يوجد علم انحدر الينا عبر القرون كبناء وثيق شاهد بالعبقرية العلمية للإنسان مثل هندسة الرياضي الاسكندري أقليدس. ولكن بعد ثلاثة وعشرين قرناً من الثبات والتقدم ظهر هندسيون من أمثال ريمان (Reimann) ولوبتشفسكي (Lobachevski) في القرن الماضي وغيرهما من الرياضيين الذين كانوا ينقبون في أسس علمهم وقواعده التي يقوم عليها فشعرت بفضلهم الرياضيات فجأة بحاجتها إلى نقد ذاتي لتقصى أسسها وأصولها التي تقوم عليها طوال القرون عندما تبين هؤلاء الرياضيون إمكان هندسات أخرى عديدة

كل واحدة منها متسقة القضايا أو النظريات ومخالفة لغيرها ، كما تختلف جميعاً عن الهندسة الموروثة عن أقليدس ، وبدا فوق هذا أن بعض تلك الهندسات الجديدة أكثر قرباً من الواقع الكروي لكوكبنا من الهندسة التقليدية ، وأن الكثير منها واسع التطبيق أيضاً . كل هذا إنما تبين بتحليل البناء الهندسي التقليدي للوصول إلى أسسه ومسلماته ثم بتغيير الأسس والمسلمات تغييراً يؤدي إلى قيام هندسات أخرى مغايرة ، كما تبين كذلك أنه لكي يقوم علم هندسي وثيق يجب الابتعاد بالمسلمات عن كل الأشكال المكانية والاكتفاء بإحالتها إلى المنطق الصوري وحده حتى لم تعد الهندسة نظراً في أشكال هندسية وإنما فقط في علاقات منطقية بحتة . كل هذا النقد الباطني القائم على تحليل البناء الرياضي بما فيه المسلمات إنمـــا عرف عند الرياضيين بمسألة « أسس الرياضة » (Foundation of Mathematics) بينما تسمى المسألة نفسها عنـــد الفلاسفة والكثيرين من الرياضيين أيضاً « فلسفة الرياضة » (Philosophy of Mathem.) لأنـــه واضح الآن أن أولئك الرياضيين الباحثـــين في الأسس والأصول إنما يفلسفون وأنهم بالتجائهم فوق هـــذا إلى المنطق الصوري الذي هو لباب الفلسفة وجوهرها إنما التقوا مع الفلاسفة المهتمين بنقد المعرفة العلمية عن طريق تحليل البناء العلمي إلى عناصره وأسسه لتحديد طبيعة تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا ونظريات مشتقة منها على أساس المنطق وحدة وحسب : فتساءل حينئذ الفلاسفة : أهي كلها قضايا من طبيعة المنطق الصوري أم أنها لا تمت إلى هذا المنطق بصلة وإنما تستقي من منابع تجريبية تعرف عند الرياضيين باسم « الحدس » ، ثم ما هو معنى « الحقيقة » في الرياضة وما قيمة الحقائق الرياضية؟ هكذا نجد أن فلسفة الرياضة اليوم ملتقى أبحاث الرياضيين والفلاسفة معاً وأكبر مظهر من مظاهر التعاون المثمر بين العلم والفلسفة .

ولقد انعقد أول مؤتمر دولي لفلسفة العلوم وتحت هذا الاسم في باريس سنة ١٩٣٥ وتعاقبت بعده مؤتمرات أخرى. كذلك ظهرت في برامج الجامعات دراسات تحت هذا الاسم ، كما ظهرت مجلات عديدة تحمله (١) . وفي كل الأحوال ينصب البحث فيها على الرياضيات والطبيعيات بصفة خاصة وإن كان يصبح أن يمتد ليشمل علوم الاحياء والتاريخ والعلوم الانسانية الأخرى .

أما المسائل التي تعالج في فلسفة العلوم فأمر مختلف فيه أشد اختلاف ، ولقد ذكرنا أمثلة سريعة لمضمون هذه الفلسفة في التاريخ والطبيعيات والرياضيات . ولكن يمكن الأشارة إلى ما يأتي من الموضوعات ·

أولاً : موضوعات ذات طابع منطقي صرف . وهي إما موضوعات من المنطق الرمزي نفسه أو أبحاث في التعريفات والقضايا الخاصة بعلم ما مع تحليلها تحليلاً رمزياً (أي بواسطة رموز المنطق الرياضي) بقصد اشتقاق الحدود المعرفة بعضها من بعض وبرهان القضايا أو النظريات على أساس المسلمات .

ثانياً : موضوعات ذات طابع فني علمي : وهي بالنسبة إلى الرياضة كالبحث في أسس (Foundation) البناء الرياضي كله أو أسس أية نظرية رياضية منفردة لاستقصاء الأصول والمسلمات ، أو كالبحث في معالجة نقائض الرياضة . أما بالنسبة إلى الطبيعيات فكالبحث في الأفكار الأساسية

---

(١) المجلات الآتية : (بلتمور بامريكا) 1. *Philosophy of Science*
(جوتنبرج بألمانيا) 2. *Theoria*
(اكسفورد بانجلترا) 3. *Analysis*
(ليبسج بألمانيا) 4. *Erkenntnis*

التي تستند اليها ، مثل أفكار الزمان والمكان والحركة والضوء والسرعة والذرة وبالجملة كل الثوابت في الطبيعيات الرياضية .

ثالثاً : موضوعات ذات طابع منهجي (أي خاص بمناهج كل علم على حدة) : ففيما يختص بالرياضيات يتناول البحث كيفية إقامة ما يسمى النسق الاستنباطي Deductive System كما يتناول بحث الشروط المنطقية لاختيار المسلمات ، وفيما يختص بالطبيعيات يتناول البحث مشكلة الاستقراء من جوانبها المختلفة .

رابعاً : موضوعات ذات طابع فلسفي ومثالها المواقف الفلسفية الأساسية التي يقفها الباحث حيال حقائق علم ما من العلوم . ففيما يختص بالرياضة مثلاً نجد في الوقت الراهن ثلاثة مواقف أساسية تتنازع الأمر فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة وهي : موقف المناطقة الذين يرون في قضايا الرياضة مجرد قضايا من المنطق الصوري وحسب ، ثم موقف الأكسيوماتيكيين الذين يرون أن المنطق والرياضة نابعان سوياً من أصل آخر قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية ، ثم أخيراً موقف الحدسيين الذين يرفضون الموقفين السابقين ويؤكدون أن الحقائق الرياضية لاصلة لها بالمنطق وأنها نابعة من نوع خاص من التجربة الفكرية يسمى « الحدس الرياضي » . أما فيما يختص بالطبيعيات فيدور البحث حول تحديد أفكار كالعلية والحتمية والفرض والقانون والاحتمال وما قارب هذه المسائل التي تلتقي كلها في تقويم للقوانين العلمية وهل هي حقائق ضرورية أم اتفاقات عابرة من صنع العلماء أم غير ذلك من المواقف الفلسفية المعروفة حيال فكرة « الحقيقة » .

* * *

-(٣)-

نريد الآن أن نحصر جوامع الكلم في فلسفة الرياضة كما سنقدمها في الفصول القادمة .

ونحن لكي نستعرض موضوعاً معقداً كهذا له جوانبه الفنية البحتة لا نريد أن نختط فيه غير خطة تاريخه هو نفسه وحسب، فأوضح الطرق اليه وأيسرها الالتزام بالمنهج التاريخي في تعقب ظهور المسائل وتطورها وحلولها واتجاهاتها عبر التاريخ الطويل للرياضة والفلسفة معاً . إلا أن منهجنا التاريخي هو مع ذلك نقدي تحليلي في آن واحد ، بمعنى أننا نتوقف أمام كل مسألة تظهر في التاريخ المشترك بين هذين العلمين ، لنتفهم مغزاها ودورها الذي تؤديه فوق مسرح فلسفة الرياضة بحيث يبدو في حقيقة الأمر أن البحث ليس تاريخياً وحسب ، وإنما هو أيضاً نقد وتحليل للمواقف الفكرية الأساسية مع تقويم للدور الذي يؤديه كل موقف منها . ومن ثم قسمنا خطواتنا في البحث إلى المراحل الأربع الآتية :

في المرحلة الأولى نبدأ من تعريف تقليدي للرياضة بموضوعاتها (انظر الفقرة ٤) ونحاول أن نتتبع الأصول التي نشأت عنها تلك الموضوعات فنرفض الحلول المثالية والحسية والاجتماعية لفكرتي المكان والعدد (فقرة ٥) ونبين أنه لا بد لنشأة موضوعات الرياضة من حضارة العلم والعقلية العلمية مما توافر في بلاد اليونان القديمة لأول مرة في التاريخ، وهكذا نشأت الرياضيات منذ فيثاغور واليه ينتسب الرياضيون القدماء الذين اهتموا ببرهان النظريات متفرقة دون محاولة تنسيقها جميعاً في نسق علمي موحد (الفقرة ٦) أما تنسيقها في علم موحد فيرجع الفضل فيه إلى رياضي من العصر الأسكندري هو أقليدس الذي أفاد من تحليلات أرسطو الرائعة للأسس التي تستمد منهـــا

الهندسة براهينها وهي التعريفات والأصول والمسلمات، فكان هذا التحليل الأرسطي حجر الزاوية في البناء الرياضي الكبير الذي أقامه أقليدس طبقاً لذلك التحليل، كما كانت المسائل التي أثارها المنهج المشترك بين أرسطو وأقليدس هي عين المسائل التي سيثيرها المحدثون بشأن الرياضة وأسسها (فقرة ٩) .

وفي مرحلة ثانية نبدأ من تقسيم للرياضة إلى هندسة وتحليل ونتناول الهندسة في العصر الحديث على انفراد ونبين كيف أن محاولات الرياضيين الفاشلة برهان المسلمة الخامسة عند أقليدس بالأضافة إلى محاولاتهم قبول مسلمات بديلة لها تناقضها أسرع بظهور هندسات لا حصر لها في القرن التاسع عشر، كما أسرع بحركة النقد الذاتي في الوقف عينه وعند الرياضيين أنفسهم لعلمهم ولأسسه ومسلماته (فقرة ١٠) مما أدى بهم في آخر المطاف إلى تصور جديد « للحقيقة » الرياضية التي لم تعد عندهم مطابقة المسلمات للواقع وإنما فقط عدم تناقض مسلمات كل هندسة على حدة فيما بينها بغض النظر عن الواقع أو المكان لأنه لا واحدة من الهندسات أولى من غيرها بادعاء المطابقة (فقرة ١١) كما أدى بهم أيضاً إلى تقصي مسلمات كل هندسة على حدة وحصر النظريات المترتبة عليها . وإلى الاقتصاد في في عدد المسلمات وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن وهذا كله مما عرف أنذاك بمباحث تأسيس الهندسة أو « الأكسيوماتيك » وهي الحركة التي أسفرت آخر الأمر عن تجريد المسلمات عن كل المعاني الهندسية الدالة على أشكال وإحالتها تماماً إلى تصورات من المنطق الصوري وحده. وعند هذا الحد أصبح لزاماً على المنطق الصوري أن يتطور أيضاً إلى علم رياضي (فقرة ١٢) كما أن اختيار طائفة من المسلمات لإقامة هندسة ما اتضح أنه يجب أن يخضع

إلى شروط منطقية معينة إذا لم تراع تلك الشروط تناقضت المسلمات أو أدت إلى نظرية أخرى (فقرة ١٤) .

وفي مرحلة ثالثة من البحث نتناول الجبر والتحليل ونتصدى لحركة النقد الذاتي في التحليل التي انطلقت من اكتشاف دوال رياضية منفصلة أي لا تشهد « بالاتصال » او الاستمرار وكان يظن ان الدوال كلها متصلة أي تجتاز قيماً عددية متتابعة لا فجوات فيها وبذلك تعبر خطاً هندسياً متصلاً . فظهرت منذ ذلك الوقت في منتصف القرن الماضي حاجة ملحة عند الرياضيين إلى التخلي عن الحدس الهندسي برمته الذي يمثله في التحليل ذلك الاتصال (فقرة ١٦) فنبذ الرياضيون فكرة الاتصال كأساس للتحليل واتجهوا إلى الأعداد الحسابية المعروفة يلتمسون فيها أساساً وثيقاً لعلم التحليل وأصبح هذا الاتجاه محتوماً منذ اكتشاف الأعداد التخيلية (فقرة ١٧) وهكذا بدأ الرياضيون يردون الرياضة كلها إلى الحساب الأولى المعروف وأصبح العدد الصحيح المقياس الوحيد لليقين الرياضي، وهذا ما عرف في تاريخ الرياضة في القرن الماضي بحركة « تحسيب » (أن امكن التعبير) الرياضة أو « بالمذهب الحسابي » فردوا الأعداد التخيلية إلى العدد الصحيح (فقرة ١٨) كما ردوا اليه أنواع الأعداد جميعاً ومن أهمها الأعداد الصماء التي احتاجت إلى إحدى نظريتين : الحد أو القطع ، لكي ترد إلى الأعداد الصحيحة وربطوا الهندسة بواسطة الأعداد الصماء التي تشهد بالاتصال (أو بعملية متصلة) إلى الأعداد الصحيحة . فأصبحت الرياضة كلها قائمة على الأعداد الصحيحة وعملياتها واكتسبت الرياضة منها يقينها كذلك . وهكذا أضفى المذهب الحسابي على الرياضيات وحدة وتماسكا ، ويقيناً مستمداً من يقين الأعداد (فقرة ١٩) . ثم ظهرت في نفس الوقت الذي نضج فيه المذهب الحسابي في الربع الأخير من القرن الماضي نظرية

المجاميع للرياضي جورج كانتور الذي اقتحم بها أمنع الحصون على الفكر البشري وأقدمها وهو حصن الأعداد اللامتناهية فوسع من أفق الحساب وأمده بعالم من أبدع ما اكتشف الإنسان ، وفي هذا كله دعم للمذهب الحسابي من خارجه، وتأكيد بأن الأعداد كلها، المنتهى منها واللامنتهى، أساس كل شيء في الرياضة (الفقرة ٢٠) . وأذا كانت الكلمة الأخيرة في المذهب الحسابي هو أن الأعداد الصحيحة هي كل شيء في الرياضة فإن الرياضيين الباحثين في أسس علمهم بعد ذلك لم يقنعوا بمثل تلك النتيجة ورأوا أنه لكي تكتسب نظرية الأعداد نفسها كل ما هي جديرة به من يقين لابد من العودة إلى المنهج الرياضي التقليدي وهو إقامة الأعداد نفسها على « مسلمات » تنتجها ومن ثم محاولات كثيرة في اكسيوماتيك العدد . وقد استدعت هذه المحاولات تحليلاً منطقياً جديداً للأعداد نفسها لكي ترد إلى ثوابت المنطق الصوري، كما احتاج المنطق الصوري نفسه إلى دفعة حاسمة جعلته علماً رياضياً بحتاً بحيث ينهض بتبعاته الجديدة من جهة استنباط الأعداد منه، وكذلك للمساهمة في حل نقائض الرياضيات المعاصرة (فقرة ٢١) .

بقيت المرحلة الرابعة والأخيرة التي نستعرض فيها المذاهب المعاصرة في فلسفة الرياضة مجردة عن كل جوانبها الفنية البحتة التي لا تهم إلا الرياضيين وحدهم . ونتوقف طويلاً عند المذهب الأول منها وهو المذهب اللوجستيقي . وهو موقف أولئك الفلاسفة الذين رأوا امكان قيام فلسفة علمية ، أي تتخذ منهج العلم ، وموضوعها متابعة تحليل الرياضة إلى أبعد مما وصلت إليه في المذهب الحسابي أو في حركة أكسيوماتيك العدد . فكان منهج هذه الفلسفة العلمية هو المنطق في أقوى وأحدث صوره الرياضية وهو ما يسمى اللوجستيقا ، أما موضوعها فهو اشتقاق العدد من ثوابت المنطق الجديد ومن وراء العدد

اشتقاق كل نظريات الرياضة كما رتبها المذهب الحسابي (فقرة ٢٢) . ولا بد أن نستعرض أول فروع الحساب في هــذا المنطق وهو حساب القضايا الأولية لكي نلمس عن قرب طبيعة هذه الآله الفنية الجديدة التي تستعملها الفلسفة العلمية في معالجــة مشكلات العلم الرياضي (فقرة ٢٤) ونتبين أيضاً الأسس المنطقية البحتة لذلك البناء اللوجستيقي الذي يجمع المنطق والرياضة معاً في نسق موحد نتدرج فيــه من المنطق إلى الرياضة بحيث تبدو الرياضة مشتقة من المنطق عن طريق العدد الذي انتهى اليــه المذهب الحسابي (فقرة ٢٥). ثم نعالج بعد ذلك المذهب الأكسيوماتيكي وهو الذي يرفض اشتقاق الرياضة من المنطق ويقرر أن الرياضة والمنطق ينبعان متوازيين معاً من شيء قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (فقرة ٢٦) . ثم نختتم باستعراض المذهب الحدسي الجديد الذي يرفض المذهبين السابقين ويعود إلى فكرة الحدس أو تلك التجربة الفكرية المباشرة التي يألفها الرياضيون كمنبع أصيل ووحيد للرياضة (فقرة ٢٧) . ولا سبيل إلى التوفيق بين هذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة لأنه على حد تعبير للرياضي هــنري بوانكاريه لا سبيل إلى التوفيق بين المنطقيين والتجريبيين ، بين ذوي العقلية الكانتورية (نسبة إلى جورج كانتور) التي تقبل اعداداً لا متناهية وذوي العقلية غير الكانتورية التي لا تقبل إلا الأعداد المنتهية ، بين من سماهم وليم جيمس ذوي العقول الرقيقة وذوي العقول الخشنة .

الفصل الثاني

موضوعات الرياضة ونشأتها عند الإنسان وتاريخها قديماً

(٤) التعريف التقليدي للرياضة بموضوعاتها . (٥) الأصول الفزيولوجية والاجتماعية لفكرتي المكان والعدد ، أو للهندسة والحساب (٦) نشأة الرياضيات كعلم عند اليونانيين .

— (٤) —

تبدو الرياضيات الآن عند النظرة الأولى أنها تختلف تماماً عن غيرها من العلوم كالطبيعيات وعلوم الأحياء مثلاً .

فهذه الأخيرة تستند إلى مشاهدات حسية وتجارب . وتحتاج إلى معامل علمية وآلات متفاوتة تعقيداً لكي تتكون وتنمو .

في حين أن الرياضيات تستعيض عن ذلك كله بالسبورة والطباشير أو بالورق والقلم وحسب ، كما لو كانت تنبع كلها من رأس الرياضي . وهذا ما عبرت عنه لوحة من القرن السابع عشر محفوظة بمتحف اللوفر صور فيها

فرديناند بول (Boll) الرياضي رجلاً ينظر إلى سبورة عليها أشكال وأعداد . كما عبرت عنه أيضاً فلسفات كبرى منذ القدم فقد ذهب افلاطون إلى أن موضوعات الرياضة أو على الأصح ماهيات الأشكال والأعداد ليست من عالم الحس المتغير وإنما هي مثل قائمة بذواتها وثابتة ، يتأملها الرياضي ويصدر عنها في علمه . وفي محاورته المسماة باسم فتى من أثرياء أثينا هو « مينون » نجد أن خادمه الذي لم يتلق علماً استطاع — بعد أن حاوره سقراط لتوليـــد الحقيقة أو المعرفة من ذهنه — أن يبرهن دون مشقة نظرية معقدة في الهندسة لأن تلك المحاورة أثارت في ذهنه ذكريات قديمة لمشاهدته السابقة في عالم علوي لتلك المثل الرياضة القائمة بذواتها أبداً .

وفي الواقع إن موضوعات الرياضة في صورتها التي يألفها الرياضيون اليوم تبدو مجردة عن كل ما هو حسي وكأنها تنبع من الفكر وحده . فهي موضوعات لا تشير إلى الأشياء حتى تحتاج مقدماً في تكوينها واطراد نموها إلى تجربة سابقة وإلى معرفة بها ، وإنما هي تشير فحسب إلى الجانب الذي « يقاس » و « يعد » منها ، أعني أنها تتناول جانب الزيادة والنقصان والمساواة في الأشياء وهذا هو « القياس » كما تتناول جانب « الترتيب » أو « النظام » في تتابع الأشياء وتسلسلها وهذا هو « العدد » .

ومن ثم كان الموضوع الذي تنظر فيه الرياضة كما تراه الفلسفات موضوعاً مزدوجاً :

القياس والترتيب (Mesure & Ordre) كما يقول ديكارت .

أو الكم والمقدار ، أو الكم المتصل والكم المنفصل كما تقول اصطلاحات اكثر قدماً عند فلاسفة كثيرين ، ترجع في أصولها إلى أرسطو .

ذلك هو الموضوع المزدوج للرياضة وبه تعرّف عند الفلاسفة دائماً .

نلاحظ الآن في هذا الموضوع المزدوج أنهم يضعون في الطرف الأول من كل ثنائية من تلك الثنائيات موضوع الهندسة وفي الطرف الثاني موضوع الحساب . يقول مثلاً ابن سينا (في النجاه ص ٣٣٨) « والكم ينقسم إلى المتصل ... وإلى المنفصل ... ومن حيز الكم المتصل تبتـدىء الهندسة ويتشعب دونهـا التنجيم والمساحة والأثقال والحيل . ومن حيز المنفصل يبتدىء الحساب ثم يتشعب دونه الموسيقى وعلم الزيجات . ولا نظر لهذه العلوم الرياضية في ذوات شيء من الجواهر ولا في هذه الكميات من حيث هي في الجواهر » . وهو يعني بالفقرة الأخيرة أن الرياضيات لا تتناول الكم متصلاً أو منفصلاً من حيث هو متحقق في الأجسام وانما من حيث أن الكم مجرد وخالص في نفسه عن كل جوهر يحل فيه .

–(٥)–

وواضح أن الكم والعدد كما يتناولهما العلم الرياضي أكثر الأمور العلمية تجريداً وبعداً عن الأشياء الحسية التي يعالجها علماء الطبيعة والاحياء بحيث يسهل على المتأمل فيهما ، أو بالأحرى في أصولهما ومنابعهما ، أن يذهب مذهباً مثالياً كمذهب أفلاطون في القديم كما رأينا أو كمذهب الرياضيين المحدثين هرميت (Hermite) وكرونكر (Kronecker) .

ولكن مثل هذا المذهب في الأصول المثالية أو المنابع العقلية الصرفة للموضوعات الرياضية لم يكن مقبولاً دائماً عند المفكرين المهتمين بأصول هذه الموضوعات وخاصة بعد أن عرف الكثير عن فزيولوجية الحواس كمنبع بعيد ومحتمل لهذه الموضوعات ، وبعد أن جمع علماء الاجتماع

وقائع كثيرة عن فكرتي المكان والزمان اللتين يُرد اليهما أحياناً الكم والعدد على الترتيب في بعض الفلسفات ، وذلك عندما تقصوا أصولهما البعيدة عند الشعوب القديمة وعند البدائيين ، وأخيراً بعد أن عرفنا كذلك الكثير عن تاريخ الرياضة وتطور موضوعاتها طوال تاريخها .

فكل هذه الدراسات الحديثة تضافرت في إلقاء أضواء متنامة على أصول متواضعة وتجريبية لأفكار مثل المكان والزمان والكم والعدد وغيرها، وهذا لما يبطل كل نظرة مثالية في أصول الرياضة ومنابعها .

فلقد بين ارنست ماخ (Ernst Mach) في كتابه المعرفة والخطأ لأول مرة ان تلك الأفكار وليدة التكوين الفزيولوجي للحواس الانسانية . فهناك أنواع – كما يقول – من الكم تختلف باختلاف الحواس كالكم البصري والكم اللمسي والكم الضغطي والكم السمعي وغير ذلك .

ويؤيد هذا الرأي أن فزيولوجية الحواس كشفت منذ أواخر القرن الماضي عن مثل تلك الحقائق وخاصة فيما يخص أصل فكرة المكان وذلك في التجارب المعروفة عند فبر (Weber) باسم ظاهرة تعين المكان أو الموضع (Localisation) فوق سطح الجلد . فنحن نعلم الآن من تلك التجارب أن تطبيق طرفي برجل فبر فوق أية رقعة من سطح الجلد لا يحس باختلافهما كنطقتين متمايزتين إلا إذا انفرجت زاوية البرجل انفراجاً كافياً بحيث أذا نقصت تلك الزاوية لم تتمايز النقطتان وبالتالي لم تدرك المسافة بينهما أي « المكـــان » كما نعلـــم كذلك أن لذلك الانفراج حداً أدنى يختلف كثيراً باختلاف مناطق الجلد فهو صغير جداً فوق أطراف الأنامل كبير نسبياً فوق الكتفين والفخذين مثلاً . ثم نعلم فوق هذا ان ذلك الإحساس بالمسافة (أو المكان أو الكم وكلها هنا مترادفة) إنما هو

نتيجة لانتشار جسيمات أو نهايات عصبية معينة تعرفها فزيولوجيا الحواس انتشاراً متفاوتاً فوق سطح الجلد فهي كثيفة في أطراف الأنامل قليلة في الظهر. وهذا كله يؤيد الرأي القائل بالأصول الفزيولوجية الممكنة لموضوعات الرياضة ضد المثاليين .

لكن في الحقيقة مهما تكن أهمية تلك الأصول الفزيولوجية الممكنة فإنها لا تعدو أن تكون مجرد أصول ذاتية وفردية لا تكوّن علماً مشتركاً بين الجميع، ولذلك فإن علم الاجتماع يحاول أن يفسر هذا الاشتراك بين الناس فيذهب إلى أصول اجتماعية للأفكار الرياضية . فعلماء الاجتماع الذين تقصوا الشعوب البدائية يقولون إن اتفاق قبيلة ما في تصور مكان خاص بها ويعم أفرادها أنما له أسباب وأصول اجتماعية بحتة تلخصها عبارة « حاجات الحياة في الجماعة » . فتلك الحياة تفرض على أفراد القبيلة الانتقال للصيد وإلى مكان التوتم لاداء الشعائر الدينية وتفرض تقسيم الأرض وتعيين الجهات واتخاذ نقط ارتكاز (علامات) فوق التربة للانتقال . ومن ثم كان المكان القبلي مكان الأعمال اليومية التي يحتاج اليها البدائي .

وفي حدود تلك الأعمال المعبرة عن حاجات البدائي في مجتمعه يمكننا أن نتكلم عن التصور البدائي للمكان أو الكم ذلك التصور الذي يخلو تماماً من كل صفة نظرية ومجردة مما يمتاز به المكان العلمي فهو مكان ممتلىء بالأعمال والحركات التي تجري فيه وبالعناصر المشخصة للحياة اليومية . فالبدائي يعرف كل أجزاء مكانه اليومي معرفة حركية وعملية ولكن ينقصه للدهشة الشديدة التصور المجرد أو الادراك العقلي الخالص عن الحركة والعمل لفكرة المكان . بحيث لو سألت بدائياً عما هو المكان مجرداً عن الأعمال والحركات، أي عن المكان الذي يستعمله الرياضيون والهندسيون مثلاً فاننا

لا نجد عندهم للدهشة الشديدة المقدرة حتى على مجرد فهم السؤال . هذا ما يقوله علماء الاجتماع من أمثال دوركيم Durkheim وموس Mauss .

فلا بد إذن من فكر آخر غير الفكر البدائي ولا بد من حضارة أعلى من المجتمع البدائي كحضارة العلم لكي نصل إلى فكرة المكان ذى الأبعاد الثلاثة الخالية من الأعمال والحركات والأجسام ، التي هي موضوع الهندسة . ذلك لأن المكان الرياضي يمتاز بصفات هامة لا تقوى عليها العقلية البدائية فضلاً عن استحالة استمدادها من فزيولوجية الحواس . فهذا المكان هو مكان مستمر متصل (Continu) نستطيع أن ننتقل فيه كيف شئنا دون فجوات فيه ، ثم إن أجزاءه متشابهة أو متجانسة (Homegène) ولا كيف محدد لها (Isomosphe) كما إنه لا ينتهي (Infini) بعبارة أخرى لا تكفي الأصول الاجتماعية لإقامة المكان الذي يحتاج اليه علم الرياضة .

من جهة أخرى نستطيع أن نتتبع نفس الخطوات السابقة في نشأة فكرتي الزمان والعدد . هما فكرتان متصلتان إحداهما بالأخرى من حيث ان تتابع الأعداد ربما لم يكن يمكن تمييزه إلا نتيجة لتتابع آنات الزمن فيرجع العدد بذلك إلى الزمن .

أما الزمن نفسه فنستطيع أن نتتبع أصوله في الحياة النفسية وتتابع أحوالها عند الفرد وهذا هو الأصل التجريبي البحت لفكرة الزمان . ولكن هذا القول لا يكفي في إقامة علم على الزمان لأنه زمان فردي بحت . وهو لكي يكون عاماً يزعم الاجتماعيون أنه يكفي أن نتتبع أصوله الاجتماعية . وفي الواقع نجد أن البدائين يقسمون زمنهم أو أوقاتهم إلى زمان طقوس وشعائر وإلى زمان عمل وصيد كما نجد تقسيماً أخر حسب معتقداتهم إلى زمان نحس فلا يعملون فيه شيئاً وإلى زمان حظ . فهنا زمان مشبع بالحياة البدائية ولا يستطيع

ان يؤدي الى علـــم رياضي اذ تحتاج الرياضة إلى حضارة فكرية أعلى هي حضارة العلم التي نستطيع فيها أن نجرد الزمان من كل هذه التقسيمات البدائية العملية ونرقى الى زمان يمتـــاز كالمكان بصفات الاتصال والتجانس والخلو من الأشياء واللانهاية .

وربما كانت فكرة العدد قريبة في منابعها من فكرة الزمان فترجع مثلها الى تتابع الحالات النفسية عند الفرد . ولكن مهما تكن أصولها التجريبية هذه فهي لا تفسر لنا العدد في تجرده وعمومه كما هو في الرياضة . ولقد وجد الاجتماعيون فكرة العدد في الشعوب البدائية في صورة يختلط فيها العدد بالمعدود إلى حد يدهش المتحضر ، فان البدائي يستطيع من مجرد منظر شيء ما أن يحدد عدده بينما يحتاج هذا من المتحضر الى مقابلة أجزاء ذلك الشيء واحداً واحداً بسلسلة الأعداد . كما وجدوا أن بعض الشعوب البدائية لا يعرف من سلسلة الأعداد غير الأعداد الثلاثة الأولى وبعد ذلك يطلقون « كثير » للدلالة العددية . وهناك شعوب بدائية تطلق أسماء مختلفة على عدد واحد بعينه تبعاً لاختلاف المعدودات . وهناك شعوب اتخذت العدد خمسة أو العدد عشرين أو حتى العدد ستين بدلاً من العدد عشرة كأساس للحساب العددي . كل هذا يشهد بأن فكرة العدد التي هي أكثر عمقاً من فكرتي المكان والزمان احتاجت إلى تجريد عقلي وإلى حضارة علمية أعلى من حضارة البدائي .

وفي ضوء هذا كله يتبين لنا أننا إذا رفضنا المذهب المثالي في أصول الرياضة فان المذهبين : الفزيولوجي والاجتماعي مهما ألقيا من ضوء على أصول متواضعة لموضوعات الرياضة إلا أنهما لايكفيان إطلاقاً في فهم حضارة العلم .

ولذلك ننتقل الآن إلى إلقاء نظرة في أصول الرياضيات من خلال تاريخ نشأتها عند القدماء .

٦

إن أقدم وثيقة عن الهندسة هي البردية المصرية المسماة باسم مكتشفها الألماني رند (Rhind) وهي عبارة عن مخطوطة كاتب الملك أحمس التي ترجع إلى ٣٥٠٠ سنة وتشتمل على وصفات عملية مختلفة في الرياضة لحل المشاكل اليومية لدى المصري القديم . وحاجة المصري القديم إلى إعادة مساحة أرضه عقب كل فيضان كما يلاحظ هيرودوت ، وإلى التعمير والبناء ، هي نقطة البدء في نشأة علم المساحة الذي هو علم الهندسة في مرحلته التجريبية ، والممهد لها . من تلك الوصفات العملية التي لا نعلم بعد طريقة حسابها تقدير قدماء المصريين لمحيط الدائرة بستة عشر تسعاً من قطرها وهو تقدير تقريبي طبعاً . ومن تلك الوصفات أنهم توصلوا بالتقريب أيضاً الى مساحة المثلث المتساوي الساقين والذي أصلاعه أ ، أ ، ب وذلك بضرب أ × ب مقسوماً على اثنين مما يؤدي الى نتيجة تقرب إلى الحقيقة كلما كان أ أكبر من ب . كما عرفوا عملياً كذلك ان المربع المقام على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك في حالة واحدة فقط هي حين تكون أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية على التوالي ثلاث وحدات وأربع وخمس . أعني أنهم عرفوا عملياً النظرية التي ستنسب فيما بعد إلى اليوناني فيثاغور ولكن في حالة واحدة بالذات هي الموصوفة آنفاً ولم يستطيعوا الارتفاع عنها إلى النظرية في عمومها .

كذلك لم يستطع قدماء الهنود أن يرتفعوا إلى النظرية في عمومها إذ عرفوها عملياً محصورة في حالة واحدة هي حين تكون أطوال أضلاع المثلث خمس وحدات واثنتي عشرة وثلاث عشرة على التوالي .

وهكذا أدت الحاجات العملية كمساحة الأرض مثلاً بقدماء المصريين

وغيرهم كالهنود إلى السير في الطريق المؤدي إلى اكتشاف علم الهندسة عن طريق علم المساحة ولكن دون اكتشاف الهندسة ذاتها كعلم نظري له قضاياه ونظرياته العامة التي يبرهن على صدقها وعمومها في كل خطوة من خطواته.

اما الاكتشاف الحقيقي لعلمي الهندسة والحساب بنظرياتهما وقوعدهما مع البرهان النظري على صدقها صدقاً يعم كل الحالات الجزئية فمن اسرار الحضارة اليونانية .

إن أرنست رينان E. Renan وهو من أئمة مفكري القرن الماضي ، في كتابه الطيب عن « مستقبل العلم » الذي يستفاد به في فهم الروح العلمية برغم نظرته الضيقة إلى العلم من خلال علم إنساني كالفيلولوجيا (فقه اللغة) بدلاً من خلال علوم الطبيعة التي يمكن أن يكون لها مستقبل واضح ، إن ارنست رينان هذا لم يجد تفسيراً يبرر به ظهور العلم عند اليونانيين لأول مرة في تاريخ الانسانية كقضايا عامة يبرهن على صدقها إلا القول بأن ذلك هو « المعجزة اليونانية » . وهو يعني أن المعجزات اذا كانت من نوع ديني فمعجزة اليونانيين تأسيس العلم . ولقد أصبحت عبارة رينان هذه شائعة الآن بين المؤلفين الغربيين الذين يشاطرونه الرأي بأن العلم عند اليونان غير مسبوق في تاريخ غيرهم .

الواقع إن السر في قيام تلك المعجزة هو أدراك اليونانيين دون غيرهم من الشعوب القديمة لفكرة العلم كحجة أو برهان على صدق قضية ما صدقا عاماً أي في كل التطبيقات الجزئية التي تصادفها ، وذلك بدلاً من الاكتفاء بوصفات عملية وقواعد تقريبية غير أكيدة كما فعل قدماء المصريين . لقد كان اليونانيون ككل شعوب حوض البحر الأبيض المتوسط شعباً يحب الجدل والمناظرة . ولكنهم امتازوا ببيئة سياسية لم تتح لغيرهم ، فيها تنافس شديد بين المدن التي تريد كل واحدة منها السيطرة على غيرها وعلى البحار والتجارة ،

كما فيها أيضاً حرية فكرية تسمح بتنافس حر طليق بين أفراد المدينة للسيطرة على مصائرها . وهذا كله مما جعلهم ينمون ملكة النظر العقلي وفنون البلاغة والخطابة والدراما والفلسفة والسفسطة وغيرها من وسائل التأثير على الجماهير . فأدى بهم كل ذلك الى التنبه إلى فن الجدل والمناظرة والمنطق وبالتالي الى اكتشاف فكرة العلم ذاتها كحجة أو برهان . هكذا ظهرت فروع المعرفة المختلفة عندهم وعلى رأسها الرياضيات التي تبرز فيها العقلية النظرية البرهانية إلى أبعد حد ، وذلك منذ أقدم مفكريهم الذين حفظ لنا التاريخ ذكرهم أمثال طاليس وفيثاغور . والأول منهما هو الذي حسب ارتفاع الهرم الأكبر بقياس ظله عندما يكون ظل كل شيء مثله . أما الثاني فهو معلم الإنسانية كلها فكرة العلم بإنشائه الرياضيات وإلى مدرسته ينتسب رياضيو اليونان .

إن التفكير الرياضي الذي بدأ بفيثاغور في القرن السادس قبل الميلاد تميز بظاهرتين : أولاهما أنه امتزج دائماً بنظرات ميتافيزيقية زائدة على حاجات الرياضة نفسها وهكذا ذهب فيثاغور (أو تلميذه فيلالاوس) كما يروي أفلاطون وأرسطو) الى أن كل شيء في الوجود هو شكل هندسي وعدد . ويشف هذا التصور الميتافيزيقي الرياضي للوجود عما وصل اليه الذهن اليوناني منذ بداياته من مراحل التجريد العقلي أو العلمي الذي أفرغ العالم من كل مادته الظاهرة مستبقياً أشكالاً هندسية وأعداداً . وواضح أن مثل هذا التجريد للمكان والأعداد الذي لا تقوى عليه الشعوب البدائية أو شعوب حضارات ما قبل العلم كما رأينا إنما هو شرط أول لتكوّن الفكر الرياضي الذي يسبح دائماً في مكان متجانس الأجزاء وأعداد مباينة للمعدودات .

أما الظاهرة الثانية فهي أنه عُني بحل وبرهان مسائل متفرقة من الرياضة وإن لم يعن بربط وتنسيق تلك المتفرقات في نسق علمي موحد تتسلسل فيه النظريات

كما هو الشأن في الرياضيات الآن . ولكنه في حله وبرهانه تلك النظريات إنما أبرز لنا بكل تأكيد فكرة المعرفة العلمية على حقيقتها لأن العلم استدلال على قضية مـــا . وهكـــذا برهن فيثاغور لأول مرة في التاريخ النظرية الوحيدة التي تنسب اليه في الهندسة القائلة بأن المربع القائم على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك في كل الحالات الممكنة لتطبيقها وبغض النظر عن أطوال الأضلاع المعينة التي وقف عندها المصريون والهنود إذ لم يدركوا تلك النظرية كما رأينا إلا في تطبيقين اثنين لها . وهذا البرهان الفيثاغوري المعروف في كتب الهندسة كفيل وحده بأن يضع صاحبه فوق هامة العلم والطريقة العلمية لما تكشفه عن اتجاه عقلي غير مسبوق ولفتة مبتكرة إلى تصور العلم كقضية لا تقبل في مدينة العلم إلا مقترنة بالدليل على صحتها صحة عامة تنطبق على كل الجزئيات التي نصادفها لها في التجربة .

إن الفارق الكبير بين الموقف العلمي لفيثاغور في برهانة لنظريته والموقف العملي عند المصريين والهنود هو أن نظرية فيثاغور تثبت علاقة هندسية عامة بين المربعات المقامة على أضلاع مثلث قائم الزاوية بحيث لا تتوقف تلك العلاقة على قياس معين لأضلاع المثلث كما عند المصريين والهنود بل بالعكس من ذلك تكون اسلوباً أو مبدأ عاماً لقياس تلك الأضلاع في كل أحتمالاتها الممكنة إذ يمكن التساؤل مثلاً عن طول الوتر عندما يكون الضلعان المجـــاوران للزاوية القائمـــة هما خمس وحـــدات وسبع ففي هذه الحالة يكون المربع المقـــام عـــلى الوتر هو ٢٥ + ٤٩ = ٧٤ . ولكن نلاحظ الآن أن العدد الدال على مربع الوتر وهو ٧٤ إذا اردنا ان نستخرج منه طول الوتر مقدراً بوحدات محددة وذلك باستخراج جذرة التربيعي نجد أنه لا جذر تربيعي له بالأعداد الصحيحة إذ أن جذره التربيعي عدد لا ينتهي

في كسوره واقع بين ٨،٩ وبهذا نجد أنفسنا أمام عدد غريب لأنه غير محدد اي غير قابل للقياس بوحدات معقولة مما يقاس به الضلعان الآخران . فهناك إذن بسبب هذا العدد عدم تناسب أو عدم تقايس عددي بين أضلاع المثلث مما عرف منذ ذلك الوقت بالأعداد غير المتقايسة **Incommensurables** وهذا أول ما اكتشف من الأعداد غير المعقولة **Irrational** . إن مؤلفي العرب القدامى اصطلحوا على أن يطلقوا على هـذا العدد غير المعقول اسم العدد « الأصم » وهو الذي لا ينتهي جذره التربيعي إلى أعداد محصورة (مثل $\sqrt{٢}$) مثلاً ، كما أطلقوا على العدد الذي يقبل عملية الجذر التربيعي في أعداد منتهية العدد « المنطوق ».

وهكذا نرى كيف اصطدمت نظرية فيثاغور الهندسية منذ بدايتها بعقبة كأداء هي ظهور أعداد صماء ، فعندما انتقل فيثاغور من الهندسة إلى الحساب العددي لقياس أطوال الأضلاع ظهرت له هذه المشكلة غير المتوقعة ، تلك الأعداد الصماء التي لا يقابلها شكل هندسي ما سواء في تربيعها لتكون مربعاً قابلاً للقياس على ضلع من أضلاع المثلث أم في جذرها التربيعي لتكون مستقيماً يقاس من أضلاع المثلث بعدد منطوق على حد سواء . فتساءل كيف لا تستقيم نظريته الهندسية بالنسبة إلى الكثير من الأعداد وهي الأعداد الصماء، واعتبر ذلك « فضيحة » كتمها إلا عن تلاميذه وأوصاهم بألا يكشفوا سرها لكي لا يصيبهم شر . وهكذا اتخذت الفيثاغورية هيئة جمعية سرية عرفها التاريخ القديم طويلاً وعلى غرارها قامت جمعيات سرية في التاريخ القديم والحديث ومنها اخوان الصفاء في الحضارة الإسلامية .

إن تلك الفضيحة أو بالأحرى عجز الطرق الحسابية الذي كشف عنه وجود مثل تلك الأعداد الصماء منذ الخطوات الأولى للرياضة في الحضارة اليونانية

يبين سبب عدم الركون إلى علم العدد أو الحساب في حل المشاكل الرياضية في تلك الحضارة وبالتالي عدم تطوره الى جبر وتحليل ، ومن ثم تأخرت منزلة الحساب في العالم القديم وتقدمت عليه الهندسة وقامت كعلم ناضج منذ البداية وخضع الحساب نفسه إليها . وحتى عند الفيثاغوريين أنفسهم نشاهد إخضاع علم العدد أو الحساب الى الهندسة من أكثر من جهة .

أولاً من جهة أن فيثاغور وتلاميذه لم يتراجعوا أمام مشكلة الأعداد الصماء فحاولوا التغلب عليها على الوجه الآتي : حاولوا بالاستقراء جميع كل ثالوث من الأعداد الصحيحة (المعبرة عن أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية) لا يؤدي إلى عدد أصم . وفي ما يختص بالأعداد التي يؤدي جذرها إلى عدد أصم حاولوا أن يحددوا ذلك العدد بوضع أقرب سلسلتين إليه من الأعداد الكسرية احداهما بالزيادة وأخراها بالنقص فيقع العدد الأصم بينهما .

أما الجهة الثانية لاخضاع العدد الى الهندسة فناتج عن رمزهم للأعداد الحسابية بالنقط كما هو الأمر الآن في ترقيم أوراق اللعب مثلاً وكانوا يرتبون تلك النقط في أشكال هندسية كالمستقيم والمثلث والمربع والمخمس والكثير الأضلاع فيحصلون بذلك على الأعداد المستقيمة والمثلثة والمربعة وهكذا ، أعني يحصلون دائماً على أشكال هندسية ، وابتداء من هذه الأشكال يتوصلون الى الأعداد إذ قد وضعوا قواعد لكل شكل منها للحصول على ترتيب النقطة الأخيرة فيه الدالة على عدد الشكل مهما كان امتداده وكبره . وأنه لمن السهل ادراك القاعدة العامة التي تعرف بها قيمة العدد ن في أي شكل هندسي فهي على سبيل المثال في العدد المثلث $\frac{ن(ن+1)}{2}$ وفي العدد المربع $ن^2$ وهكذا .

ولقد درسوا خصائص الأعداد فميزوا الأعداد الأولية والأعداد الصماء والأعـداد المنقسمة بالنسبة لكل عـــدد . وجاء من جمعهم لقواسم كل عدد أنهم ميزوا العدد المخصب أو المكثر وهو الذي يزيد مجموع قواسمه على العدد نفسه ، ثم العدد المجدب أو المقل وهو الذي يقل عن مجموع قواسمه ، ثم العدد الكامل وهو الذي يتساوى ومجموع قواسمه . مثل هذه الأبحاث التي شغف بها الفيثاغوريون في الأعداد والتي عرفتهـــا الكتب العربية القديمة لم تؤد الى نظريات علمية ولم تستبقها الرياضة الحديثة وإن كانت مع ذلك لا تخلو من طرافة وعمق ففيها مسائل لم تستطع الرياضة الحديثة حلها : فان المسألة الفيثاغورية وهي هل يوجد عدد فردي وكامل معاً مسألة لم يجد الرياضيون المحدثون لها بعد حلاً كما أنهم لم يبرهنوا على امتناع وجود مثل ذلك العدد .

ولا شك ان الفيثاغوريين لو اتخذوا رموزاً للأعداد غير الأشكال الهندسية لتوصلوا كما يقول دريفوس (Dryfus) الى نتائج مخالفة بالمرة .

إن الذي نود أن نخلص اليه مما تقدم هو أن علم الأشكال أو الهندسة كان العلم الرياضي الذي نضج منذ البداية والذي كانت تحل بواسطة مشكلات الرياضة اليونانية واليه اخضع الحساب .

وحتى في حضارة العصر الإسكندري الذي ورث اليونان والشعوب القديمة الأخرى والذي ابتدأت الرياضيات فيه بأخطر كتاب في الرياضة القديمة وهو « الأصول » لأقليدس ، نجد أن علم الهندسة هو موضوع الكتاب الأساسي وأن علم الحساب ألحق بها كآخر فصل من فصولها ومشتق منها .

حقيقه لقد انقلبت الأوضاع الرياضية منذ القرن السابع عشر بعد

أن ظهر الجبر الحديث الذي هو تعميم للحساب ثم بعد أن ظهرت الهندسة التحليلية التي هي معالجة للمشاكل الهندسية بالطرق الجبرية ، فأصبح علم التحليل الجبري بنظرياته في الدوال الرياضية المختلفة العلم الذي له الغلبة على علم الاشكال الهندسية ، بل تراجعت هذه شيئاً فشيئاً حتى لم تعد هنـــاك أشكال في الهندسات المعاصرة وإنما النظر كله فيها منصب على أعداد فحسب بل وعلى تصورات منطقية خالصة ، فاختلفت بذلك مكانة الهندسة في العصر الحديث إذ اصبحت مسودة بعد أن كانت سائدة واصبح التحليل الجبري وبالتالي العدد سائداً بعد أن كان مسوداً . إلا أنه رغم هذا الانقلاب والتطور فإن المنهج الذي اتبعه اقليدس أو بالأحرى المسائل المنهجية التي تضمنتها هندسته والتي أسهم الفيلسوفان أفلاطون وبخاصة أرسطو في إرساء أسسها واضاءتها حتى صارت هندسته مثالاً علمياً يحتذى طوال العصور ، هذه المسائل المنهجية هي بعينها المسائل التي أثيرت أخيراً بالنسبة إلى الرياضة الحديثة في وضعها الجبري . وهذه المسائل كما سنرى متشعبة أشد التشعب ويؤلف مجموعها المسائل التي ستعنى بها فلسفة الرياضة التي هي موضوع هذا الدراسة . ولذلك نتوقف الآن عند النظر في المنهج الذي اتبعه أقليدس في « الأصول » ونبدأ منه للنظر في إلقاء ضوء على كل الأبحاث المعاصرة في أسس الرياضة بقسميها : الهندسة والتحليل .

الفصل الثالث

تعاون بين الفلسفة والرياضة منذ القدم
في سبيل تأسيس علم رياضي وثيق

(٧) لا بديل في الرياضة عن منهجها (٨) تعريف الرياضة بمنهجها
(٩) تحليل أرسطو لأسس الهندسة وتطبيق أقليدس لهذا التحليل في إقامة نسق استنباطي للهندسة .

-(٧)-

عندما انطفأت حياة الأسكندر الأكبر انتقل مركز الحضارة الفكرية من أثينا الى الإسكندرية حيث انشأ بطليموس الثاني فيلادلف بناء ضخماً سماه المتحف ابتاع له نفائس مكتبات اثينا ومنها مكتبة الليسيه التي جمعها أرسطو ، وجعله في آن واحد مكتبة ومعهداً للدراسة وأكاديمية للعلماء الذين اجتذبهم من أطراف العالم شرقاً وغرباً يعيشون بين جدرانها وعلى نفقة الدولة . وفي قاعاته الفسيحة المزدحمة بأوراق البردي انتشر المؤلفون والنساخ والمترجمون ينقلون تراث الماضي ويهذبونه ويجددون فيه .

نحن الآن في عام ٣٠٠ ق . م . حيث نجد بين هؤلاء العلماء رجلاً

أحكم الصمت عن حياته حتى جهلنا كل شيء عن أصله وسيرته ومولده ووفاته . ولا نعلم من كلماته المأثورة غير تلك الكلمة التي أصبحت مثلاً في الكتب الأوروبية والتي ارتاعت لها حاشية الملك وذلك حين سأل الملك في أحدى زياراته للمتحف رجلاً ينظر في أشكال هندسية رسمها فوق الأرض هو أقليدس بقوله ألا تعرف طريقاً آخر لاتقان الرياضيات وامتلاك ناصيتها غير طريقتك في كتابك « الأصول » ؟ (Elements) . فأجابه أقليدس بأنه « لا يوجد في الرياضيات طريق ملكي » . وهو يعني أن للعلم طريقته التي تفرض ذاتها على كل من يطلبه والناس سواسية فيها . ولم يغضب بطليموس مع أن البطالمة اشتهروا بسفك الدماء لأتفه الأسباب فقد كان يعمل على توطيد ملكه بإنشاء صروح للفن والعلم التي تخلد أسرته . وفيما يختص بعلم الرياضة بالذات توصل بطليموس ولا ريب إلى هدفه منذ إنشاء المتحف فإن كتاب « الأصول » في الهندسة لأقليدس هو من الوجهة العلمية البحتة أوثق الكتب كلها التي انحدرت إلينا من الفكر القديم وأكثرها تداولاً بعد الإنجيل عند الغربيين طوال العصور كما يلاحظ مؤرخ الرياضة كوليروس Colerus الذي قال كذلك إنه طبع أكثر من ١٥٠٠ طبعة بلغت نسخ بعضها أرقاماً خيالية .

وسر النجاح المنقطع النظير لمؤلف أقليدس هذا عبر العصور لا يرجع إلى ابتكار أقليدس لنظريات جديدة ومتفرقة كما كان يفعل الفيثاغوريون من قبل — وإن كان أقليدس قد ابتكر فعلاً وأضاف نظريات رياضية في مؤلفات أخرى له — وإنما يرجع سر نجاحه إلى الطريقة أو المنهج Methode الذي اتبعه في كتابه « الأصول » في استعراض النظريات المبعثرة المتناثرة المعروفة عند الفيثاغوريين السابقين وذلك بتنسيقها في نسق علمي موحد محكم الحلقات بحيث يتوقف فيه برهان كل نظرية لاحقة على نظريات أخرى سبق برهانها وسابقة عليها في داخل بناء منطقي يجمع كل النظريات المتفرقة ويستند بحذافيره إلى

أسس أو مقدمات أو كما يقول هو إلى « أصول » محددة قليلة ووثيقة تبقى خارج البرهان لم يفطن الرياضيون إليها من قبله . في الواقع كان الرأي الرياضي العام قد ضج بالفضائح الرياضية من النوع الذي صادفناه وزهد في ابتكار نظريات جديدة تتعرض إلى الهدم والإنكار على أساس حجج سفسطائية بل كان قد سئم مثل تلك الترهات ، وتطلع إلى إيجاد حل حاسم لإقامة علم رياضي موحد جدير باسم العلم . إذن كان الزمن قد نضج ليثمر أقليدس . وكانت رسالة أقليدس أن يخرج ذلك العلم إلى حيز الوجود وأن يكون سر نجاحه في تأسيس ذلك العلم الطريقة أو المنهج الذي اتبعه في تنسيق نظريات الرياضة المتفرقة وربطها برهانياً بحيث يستنبط بعضها من بعض . وهذه الطريقة المثلى التي أثمرت الرياضيات كلها حتى اليوم هي التي تساءل بطليموس عن إمكان بديل لها . فلم يجد عنها بديلاً للملوك .

ها نحن نقف فجأة في فلسفة الرياضة أمام فكرة « المنهج » الذي أثمرها كعلم ، فالى هذا المنهج نحول النظر منذ الآن ونكرس الانتباه ذلك لان تحليل خطوات ذلك المنهج لبيان الأسس والأصول التي تقوم عليها الرياضة ونقد تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا رياضية هي المسائل التي تتناولها فلسفة الرياضة وتجيب عليها .

—(٨)—

ونحن عندما نثير فكرة المنهج في الرياضة يجب أن نعود أدراجنا إلى الوراء ، إلى ما قبل أقليدس نفسه ، أعني إلى الفلاسفة — لا إلى الرياضيين طبعاً — الذين مهدوا ولا ريب لأقليدس في منهجه الذي اتبعه لبناء علم رياضي . فهنا نلمس التعاون الوثيق الذي نشأ بين الفلسفة والرياضة ليس

فقط في مجال فلسفة الرياضة التي هي فلسفة ، وإنما في إقامة الرياضة ذاتها كعلم وثيق وذلك بفضل التحليل الفلسفي لأسس الرياضة .

وفي تلك العودة نمهد بتعريف للرياضيات على أساس منهجها كما يعرفها المحدثون .

لقد سبق أن عرّفنا الرياضيات على أساس موضوعها وهو التعريف التقليدي لها الذي يقول أنها علم الكم والمقـــدار ، أو علم الكم المتصل (الهندسة) والكم المنفصل (العدد) .

وألاحظ الآن أن هذا التعريف « بالموضوع » يعتبر اليوم غير صالح للتعبير عن طبيعة الرياضة ككل منسجم متسق يضم فروعاً عديدة لا يدخل بعضها بكل تأكيد تحت مقولة الكم أياً كان لأن من فروعها أو موضوعاتها ما لا يمت للكم متصلاً أو منفصلاً بصلة . وربما كان سابقاً لأوانه بيان أن هنـــدسة كهندسة الوضع (Geometry of Situation) أو الحساب الهندسي عند جراسمان أو جبر المنطق عند جورج بول أو غـــير ذلك من النظريات الرياضية الحديثة لا حديث فيها عن الكم مع أنهـــا نظريات رياضية .

لذلك فإن الاتجاه الحديث للتعبير عن طبيعة الرياضة ينحو نحو تعريفها تعريفاً يتمشى مع كل فروعها كما يتمشى معها ككل منسق تتوقف فيـــه نظرية رياضية على نظرية أو نظريات أخرى . وهذا التعريف إنما هو تعريف لها بطريقتها أو منهجها لا بموضوعاتها التي تتناولها . الا أن تعريف الرياضة بمنهجها على هذا النحو يكشف في الوقت نفسه عن طبيعة موضوعها كما يتصوره المعاصرون الذين تخلوا عن التصورات القديمة للكم متصلاً ومنفصلاً كموضوع للرياضة . لكن هذا التعريف للرياضة على أساس منهجها إنما يحتاج

إلى مقدمات لكي يفهم لأنه لما كان التصور الحديث لطبيعة الرياضة والتحول إلى الاهتمام بمنهجها أنما نشأ عن حركة النقد الداخلي التي قام بها رياضيو القرن التاسع عشر لتصوراتهم الرياضية التقليدية وكانت نقطة انطلاق تلك الحركة إحدى مسلمات هندسة أقليدس التي حاول الرياضيون عبثاً البرهان على صحتها كنظرية من النظريات فكشفوا بفشلهم المتكرر عن عوالم هندسة أخرى غير عالم أقليدس ، ثم لما كان الكلام في مناهج الرياضة قد سبق إليه أرسطو وأقليدس المحدثين من الناظرين في هذا الموضوع فإنه يجب أن نقف عند مذهب هذين المفكرين القديمين قبل أن نتناول موضوع النقد الداخلي للرياضة في القرن الماضي الذي أثار موضوع فلسفة الرياضة في الفكر المعاصر بكل ما في هذا الموضوع من مواقف متعارضة متضاربة وحية .

* * *

—(٩)—

أن معرفة أرسطو برياضيات عصره ، ودوره وعلماء الليسيه في تقدمها وجمعها ، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضي أمر لا مجال للشك فيه وهو ما يدل عليه على الأقل كتابه المسمى « التحليلات الثانية » الذي تناول فيه البرهان اليقيني أو بصفة أخص الرياضي من حيث صلة هـذا البرهان بالمنطـق الصوري . فبين أن اليقين الذي تمتاز بـه قضايا الرياضة ونظرياتها أنما هو مستمد من أنهـا علم برهاني . (Demonstrative Science) أو كما يقال الآن علم استنباطي Deductive Science أو نظرية إكسيوماتيكية Axiomatic .

والعلم البرهاني عنده هو العلم الذي يحتاج لقيامه كعلم الى نقط بدء

أي أسس أو مبادىء يبدأ منها برهان قضاياه ونظرياته . وتلك الأسس أو المبادىء قليلة العدد وغير قابلة للبرهان في العلم الرياضي نفسه وإن كانت تبرهن في علم أعلى كالميتافيزيقا التي هي علم المبادىء الأولى للوجود ومنها مبادىء الرياضيات طبعاً .

من هذه المبادىء ما هو مشترك بين العلوم كلها كالمبادىء الأولية الثلاثة للوجود والفكر وهي الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع .

ومنها ما هو خاص بكل علم على حدة ، وأهمها فيما يختص بالرياضيات ما يأتي : —

١ — التعريفات وهي قضايا تشرح معنى الحدود الأولية ولا يقال لها صادقة أو كاذبة ، كتعريف الخط مثلاً بقولك إنه طول لا عرض له .

٢ — الأصول الموضوعة (Oxiomes) أو الأوضاع المتفق عليها وهي ما ترجمه العرب بعبارة « العلوم المتعارفة » . وهي قضية لا برهان عليها وواضحة في ذاتها حتى لكأنما الأنسان يعرفها دائماً إذا ذكرت أمامه كما أنه لا غنى عنها لمن يريد التعلم . ومثالها قولك الكل أكبر من الجزء .

٣ — المسلمات Postulats وهي ما نقله العرب في كلمة « المصادرات » . وهي أيضاً قضية لا برهان عليها ولكنها تختلف عن الأصل المتواضع عليه في أنها ليست بينة في ذاتها ويجد المتعلم عناداً في قبولها ومن ثم فهو يصادر بها حتى تتضح له فيما بعد ومثالها : المتوازيان لا يلتقيان مهما امتدا .

كل هذه المبادىء لا تبرهن في العلم الذي يستند إليها وإنما في علم أعلى كالفلسفة الأولى ، ولكنها المبادىء التي تستمد منها براهين النظريات الرياضية سواء مباشرة أو مما سبق برهانه من النظريات بواسطتها .

إن مثل هذا التحليل الأرسطي غير المسبوق في تاريخ الفكر الذي أوجزنا

هنا إنما يشهد بعناية هذا الفيلسوف الكبير بفلسفة العلوم منذ القدم ويشهد أكثر من هذا بأن هذا المؤلف الذي جعل من الليسيه معهداً لدراسة تاريخ العلوم والإسهام في تقدمها كان أسبق من الرياضيين في فحص مسألة مصادر اليقين الرياضي بفحص الأسس التي يقوم عليها البناء الرياضي كله . كما أنه وضع حجر الزاوية لتعاون لم ينفصم منذ ذاك الوقت بين الفلسفة والرياضة فأنشأ بذلك منذ القدم فلسفة الرياضة التي هي مجال هذا التعاون الدائم المثمر بين العلمين . لكنه لم يذهب إلى أبعد من هذا التحليل الرائع في حد ذاته، فلم يقم نسقاً رياضياً على هذه العناصر التي ميزها بل ترك الرياضة نظريات مبعثرة وغير مؤتلفة في بناء موحد كما هو الشأن عند الفيثاغوريين .

وفيما يلي فقرات من كتاب النجاة (ص ١١٢) للفيلسوف الاسلامي ابن سينا توضح ما أوجزناه عن أرسطو .

يقول ابن سينا : « الأصول التي تعلم قبل البرهان ثلاثة : حدود وأوضاع ومقدمات .

فالحدود تفيد تصور ما لا يكون بيّن التصور من موضوعات الصناعة ... مثل أن النقطة طرف لا جزء له، والخط طول لا عرض له، والسطح كذا ... وليست تفيد تصديقاً البتة ولا فيها إيجاب ولا سلب .

وأما الأوضاع فهي المقدمات التي ليست بينة في نفسها ولكن المتعلم يُراود على تسليمها وبيانها في علم آخر وإما بعد حين في ذلك العلم بعينه، مثل ما نقول في أوائل الهندسة أن لنا أن نصل بين نقطتين بخط مستقيم ، ولنا أن نعمل دائرة على كل نقطة وبقدر كل بعد، ومثل أن الخطين إذا وقع عليهما خط مستقيم فكانت الزاويتان اللتان من جهة واحدة أقل من قائمتين فان الخطين يلتقيان من تلك الجهة .

فما كان من الأوضاع يتسلمه المتعلم من غير أن يكون في نفسه له عناد سمي أصلاً موضوعاً وما كان يتسلمه مسامحاً وفي نفسه له عناد يسمى مصادرة ... » اه.

أما أقليدس الذي يكاد يكون معاصراً لأرسطو فقد كان كتابه المسمى « الأصول » دائرة معارف لما وصلت إليه رياضيات القدماء . فقد جمع فيه نظريات القدماء المبعثرة التي ظهرت في القرون الثلاثة السابقة عليه ونسب بعضها إلى مكتشفيها ، وقدم الهندسة على نظرية الأعداد (الحساب) واشتق هذه الأخيرة من الأولى متأثراً بالفيثاغوريين ، ونسق هذا كله ولأول مرة في التاريخ في نسق أو بناء واحد محكم الحلقات بحيث يستند برهان كل نظرية لاحقة إلى ما تقدم عليها في الترتيب داخل ذلك البناء وبحيث يستند النسق كله إلى تلك المقدمات أو المبادىء التي ميزها أرسطو في تحليلاته الثانية . ولا يمكن فهم أقليدس أو العمل الذي أنجزه في كتـــاب الأصول إلا في ضوء تعاليم أرسطو في هذه التحليلات فحقق كتابه بفضل تأثير أرسطو أوثق علم انحدر عبر العصور من العالم القديم . ونحن لا نستطيع أن نحدد كيف تأثر أقليدس بأرسطو ولا كيف أخذ عنه ولكن الأثر أكيد وواضح .

وكما بين أرسطو في تحليلاته كل نظرية يقينية أو برهانية إنما تقوم على قبول عدد قليل من المقدمات أو المبادىء تبدأ منها البرهنة على كل القضايا القابلة للبرهان بينما تبقى تلك المقدمات خارج البرهان وغير قابلة له في نطاق العلم القائم عليها . وهذه المقدمات عند أقليدس هي : .

١ ـ التعريفات أو الحدود . وأعطى أقليدس ٢٣ تعريفاً أو شرحاً للحدود منها على سبيل المثال :

ـ النقطة ما ليس له بعد .

ـ الخط طول لا عرض له .

– المستقيم هو الخط المشابه لنفسه ، الخ ...

٢ – المسلمات أو المصادرات وهي تختلف عن معناها عند أرسطو لأن أقليدس يعني بالمسلمات أن أشكالاً معينة هي أشكال ممكنة ، ومن هذه الأشكال :

– مد خط مستقيم بين نقطتين .

– مد مستقيم إلى ما لانهاية .

– كل الزوايا القائمة متساوية .

– إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع الزاويتين الداخلتين الموجودتين من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن المستقيمين المذكورين أو امتدادهما يتلاقيان .

(وتسمى هذه بقضية المتوازين أو بالمسلمة الأقليدية الخامسة) .

٣ – الأصول الموضوعة أو العلوم المتعارفة وهي المعارف المقبولة عامة أي البديهية ، وقد قبل أقليدس ٢٨ قضية من هذا النوع منها : –

– الأشياء المساوية لشيء بالذات متساوية فيما بينها .

– الكل أكبر من الجزء . الخ ....

وعلى أساس هذه الأنواع الثلاثة من المقدمات أو المبادىء أو الأصول يبرهن أقليدس عدداً كبيراً من القضايا المبرهنة ، أي المشتقة بالبرهان ، وهي إمّا نظريات Théorèmes أو ملحقات Corolaires أو تمارين مشهورة .

وقد حلل أقليدس بالأضافة إلى هذا خطوات برهان كل نظرية على حدة فذكر ثماني خطوات منها : ذِكْرُ منطوق النظرية Enoncé (٢) أعادة المنطوق مع الاستعانة بشكل مرسوم (Ecthèse) (٣) افتراض التسليم بصحة القضية (Epagogé) فيستعان بقضية أخرى سلم بها أو تم برهانها

(٤) ثم الأشكال الأضافية أو انشاء الأعمال (Construction) وهو عبارة عن تحليل القضية التي يراد برهانها إلى أشكال أخرى مألوفة وأبسط منها الخ .. الخ ... حتى الخطوة الثامنة والأخيرة وهي إعلان النتيجة .

كل هذه الخطوات التي يمارسها فعلاً الذين يقومون بالبرهان كانت معروفة قبله عند قدماء المهندسين وينسب أفلاطون إلى نفسه اكتشاف بعضها في محاوراته . ولكن أهمية أقليدس لا ترجع إلى مثل تلك الخطوات العملية التي تتبع في الحل وإنما فقط إلى أنه استناداً إلى تحليلات أرسطو الثانية استطاع أن يبني نسقاً استنباطياً واحداً لكل النظريات المبعثرة التي خلفها السابقون تستنبط في داخله النظريات اللاحقة مما سبقها في الترتيب ويستند الاستنباط برمته إلى قبول عدد محدود من المقدمات أو الأصول كما قدمنا .

ولما كنا سنتناول بالتفصيل طبيعة « النسق الاستنباطي » هذا عند المحدثين الذين يُعَرِّفون الرياضة بالأشارة إلى هذا المنهج وحده ، فيجب أن نميز منذ الآن التصور المشترك بين أرسطو وأقليدس لهذا النسق .

نعلم الآن بعد الذي تقدم أن النسق الاستنباطي عندهما إنما يقوم على استخلاص مقدمات أو قضايا أولية أهمها الأصول الموضوعة (Axiomes) والمسلمات أو المصادرات (Postulats) ولا فارق بين النوعين إلاّ في درجة الوضوح والبداهة لدى المتعلّم : فالأولى أوضح بينما يعاند العقل في قبول الثانية ويتقبله متسامحاً وحسب . فاذا أغفلنا هذا الفارق السيكولوجي أوالبيداجوجي (التعليمي) فإن تلك القضايا الأولية تعتبر مطابقة للواقع ومعبرة عنه ، أعني تعتبر في ذاتها أنها « حقيقية » . فالحقيقة هي في المطابقة التامة مع الخارج أو العالم الواقعي . هذا بكل تأكيد هو موقف أرسطو وأقليدس المشترك . والفيلسوف كانط (Kant) لم يتردد في تأييد مثل هذا الرأي

على نحو يختلف بعض الشيء عندما نظر إلى تلك القضايا الأقليدية الأولية على أنها قضايا « ضرورية » (Nècessaires) لأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقي الوحيد . وإن كان هذا المكان عنده ذاتياً في الذهن البشري وليس واقعياً في العالم الخارجي كما عند أرسطو وأقليدس ، وهذا هو الفارق بين الموقفين ، ولكن هذا الفارق لا يؤثر في كون تلك المبادىء الهندسية هي قضايا حقيقية لأنها معبرة مباشرة عن خصائص المكان سواء أكان في الخارج (أقليدس) أم في باطن الذهن (كانط) : فالخط يمتد عند كانط إلى مالانهاية والكل أكبر من الجزء والمتوازيان لا يلتقيان الخ ...

والمناطقة المعاصرون عندما يتحدثون عن التصور المشترك بين أرسطو وأقليدس الخاص بطبيعة النسق الاستنباطي بقصد تمييزه عن تصور المحدثين يصفونه بأنه « نسق يقيني استنباطي » Système Categorico - déductif (انظر قاموس لالاند) والمقصود بهذه التسمية إبراز كلمة « يقيني » التي تشير إلى الفكرة المميزة حقيقة لتصور القدماء وهي أن المقدمات أو المبادىء التي يستند إليها النسق « يقينية » أي مطابقة للواقع الخارجي وتبعاً لذلك تكون أيضاً القضايا المشتقة منها بالبرهان (النظريات) يقينية كذلك . ولذلك حكم مفكر مثل كانط بأن الهندسة الأقليدية هي الوحيدة الممكنة للإنسان لأن قضاياها ضرورية .

لكن التصور المعاصر للنسق الاستنباطي لا يرى هذه المطابقة ولا هذه الضرورة إذ يعتبر القضايا الأولية مجرد فروض Hypothèses أو أوضاع نتواضع عليها ولا صلة لها بالواقع الخارجي أو المكان كما أنها ليست ضرورية عند الذهن . وكل ما تمتاز به هو أنها يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها بحيث يمكنها أن تنتج طائفة من القضايا المشتقة أو النظريات التي لا تتناقض

فيما بينها . وهذا التصور لا يسمح بالطبع بالتمييز بين مسلمات أو أصول موضوعة فكلها مجرد فروض أو أوضاع نتفق عليهـــا . ومن ثم جـــاء اسمه . فالمناطقة المحدثون يصفون هذا التصور الجديد بأنه « نسق فرضي استنباطي » Système hypothetico - dèductif (بيانو ومدرسة في ايطاليا) أو Postulational System (أمريكـــا) أو Axiomatique (هلبرت ومدرسته في ألمانيا) وكلها عبارات بمعنى واحد هو أن المبادىء افتراضات ، وكلها تعريف للرياضيات بمنهجها ومن وجهة نظر المحدثين .

إن هذا التصور الجديد للنسق الاستنباطي هو الذي جعل الرياضيين المحدثين يتكشفون عن أوجه النقص الشديد في نسق أقليدس الهندسي فقد تبين الرياضيون أن نظريات أقليدس لا يمكن أن تنتج عن مقدماته الأولية وحدها لأن تلك المقدمات ناقصة نقصاً ذريعاً .

فإمام الرياضيين في مطلع هـــذا القرن وهو هنري بوانكاريه Poincaré بين نقص المقدمات الخاصة بالنقلة (Deplacement) . والرياضي الألماني مورتز باش (Pasch) الذي عاش في آخر القرن الماضي بين كيف أن هندسة أقليدس تنقصها المقدمات الخاصة بالترتيب أو النظام Axiomes D'ordre وبـــين الفيلسوف المنطقي برترايد راسل Russell كيف أن الثماني والعشرين نظرية الأولى من كتاب أقليدس تستعمل ضمناً لا صراحة عدة مقدمات مضمرة لم ينص عليها في ثبت مقدماته . وكان ديفد هلبرت (Hilbert) شيخ الرياضيين في ألمانيا حتى قبل الحرب الثانية أول من كمل وأتم أكسيوماتيك هندسة أقليدس في كتابـــه المسمى أصول الهندسة (١٨٩٩) . وهـــذا النقص كله لمما يبرر قول برتراند راسل بأنه لم يكن قبل ديفد هلبرت برهان هندسي واحد سليم . أي يستنبط نتائجه بدقة من المقدمات المصرح بها في بداية

الهندسة ودون اللجوء إلى مقدمات أخرى مضمرة في ذهن الهندسي .

خلاصة هذا كله تعاون بين الفلسفة والرياضة في الكشف عن منهج الرياضة ، تعريف للرياضة من حيث منهجها بأنها نسق إستنباطي ، اختلاف بين القدماء والمحدثين في قيمة قضايا هذا النسق أهي حقيقية وضرورية أم هي مجرد إفتراضات وأوضاع ، نقص ذريع في تحليل أقليدس لأصول الهندسة وتدارك هذا النقص عند الرياضيين المعاصرين .

الفصل الرابع

من النقد الداخلي في الهندسة الى الأكسيوماتيك الحديث

(١٠) حركة النقد الذاتي في الهندسة ونشأة هندسات كثيرة في القرن التاسع عشر (١١) معنى « الحقيقة » الرياضية الجديد ضد نظرية كانط في أسس الرياضة (١٢) حركة تأسيس المسلمات في الهندسة (الأكسيوماتيك) تبتعدعن« الحدس » وتلتقي بالمنطق الصوري(١٣) اقتراح لبوانكاريه يؤكد مدى ابتعاد مسلمات الهندسة عن الحدوس أو الأشكال (١٤) الشروط المنطقية لتأسيس المسلمات عند الرياضيين المعاصرين .

—(١٠)—

ننتقل الآن من الفكر القديم إلى الفكر الحديث في مناهج الرياضة . فلقد مهدنا بفكرة عن مناهج الرياضة عند أرسطو وأقليدس لأننا سنجد أن القرن التاسع عشر يهتم أيضاً عند الرياضيين أنفسهم بفكرة المناهج في الرياضة .

ونحن نشرع في تناول المناهج الرياضية عند المحدثين في كل من الهندسة وعلم التحليل (Analyse) على حدة وهما القسمان اللذان

يقتسمان الرياضة . فنحصر الانتباه الآن في الهندسة وحدها مرجئين الكلا عن التحليل إلى مرحلة قادمة .

إنه في الهندسة بالذات بدأت ما يسمى حركة « النقد الداخلي » قبل أن تظهر في التحليل . ونقصد بالنقد الداخلي حركة فكرية عند رياضيي أوائل القرن الماضي جعلتهم ينصرفون عن التفكير في الاستزادة من الاكتشافات الرياضية وعن تغذية علمهم بالاضافات الجديدة ، ينصرفون عن ذلك كله إلى الاتجاه المضاد تماماً وهو التفكير في فحص أو نقد نظرياتهم الرياضية القائمة والمقبولة عندهم إلى ذلك الوقت بقصد التثبت منها ومن سلامة براهينها . أن مثل هذا النقد هو بالطبع نقد ذاتي وباطني في داخل الرياضة القائمة فعلاً .

هناك في الواقع أبحاث طويلة عند الرياضيين في القرن الماضي بدأت بنقد داخلي لعلومهم وأدت آخر الأمر إلى الآراء الحديثة فيما يختص بالأسس والمناهج الرياضية .

وفيما يختص بالهندسة التي نعني بها الآن كانت نقطة البدء في حركة النقد الداخلي فيها المسلمة الخامسة عند أقليدس التي ذكرناها فيما سبق . فلقد أدرك الرياضيون منذ زمن طويل بأن تلك المسلمة (مسلمة المتوازين) ليست واضحة وبديهية كغيرها وحاولوا إقامة البرهان على صحتها كنظرية من النظريات المبرهنة على أساس المسلمات الأخرى أو بقبول مسلمات جديدة أكثر وضوحاً تنتجها . ومن هؤلاء المؤلفين نصير الدين الطوسي (القرن الخامس الهجري)وفي العصر الحديث الأب ساكيري Saccheri الرياضي الايطالي (المتوفي ١٧٣٣) الذي جاء بما توهمه برهاناً لها فكان برهانه إيذاناً بنشأة هندسات غير أقليدية . ومجمل القول في برهانه هو أن عدم استطاعة إثبات بطلان تلك المسلمة يتضمن في ذاته صحتها ، ولذلك فقد قبل الثماني والعشرين نظرية الأولى من أقليدس التي تبرهن دون حاجة إلى

المسلمة الخامسة ، ثم بعد ذلك امتحن النتائج التي تنتج عن القول ببطلان تلك المسلمة فلجأ إلى الشكل ا ب حـ د الذي يتساوى فيه ا د ، ب حـ ويسقطان عمودياً على ا ب ثم امتحن الفروض الثلاثة الممكنة الناجمة عن القول بأن الزاويتين حـ ، د قائمتان (وهذا هو منطوق تلك المسلمة عند نصير الدين الطوسي) أو حادتان أو منفرجتان ، وتلك الفروض الثلاثة تقابل القول بأن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين أو أقل من قائمتين أو أكثر من قائمتين على الترتيب . فيرفض ساكيري الفرضين الأخيرين لتناقضهما مع المسلمات الأقليدية الأخرى مستبقياً الفرض الأول ناظراً إلى أن استحالة إثبات بطلانه يتضمن في ذاته صحة المسلمة المذكورة .

إن مجمل القول في برهان ساكيري هو أنه اعتقد في قوة « برهان الخلف » فتصور فكرة محاولة البرهان على صدق قضية المتوازيين باستنباط تناقض بين انكار هذه القضية وقبول المسلمات الأقليدية الأخرى ، فبرهان الخلف إذن هو عدم استطاعة استنتاج نقيض المسلمة الخامسة من المسلمات والنظريات المقبولة الأخرى .

إنه بغض النظر عن قيمة هذا البرهان السلبي الذي لا يبرهن القضية ذاتها وانما فقط استحالة نقيضها أو بالأحرى استحالة بطلانها ، أنبه فوراً إلى أن قيمة هذا البرهان من وجهة النظر الحديثة إنما جاءت من أن هذا البرهان أتاح فرصة لتكوين فروض ثلاثة سيعرف فيما بعد أنها تقابل على الترتيب هندسة أقليدس التقليديـــة وهندسة لوباتشفسكي Lobatschevski وهندسة ريمـــان Reimann . وهاتان الأخيرتان هندستان جديدتان من المجموعة التي سيطلق عليها الهندسات غير الأقليدية Non - euclidian Geometries .

ولقد بذل الكثيرون بعد ساكيري جهداً منقطع النظير للبرهنة على

صحة المسلمة الخامسة المذكورة أمثال لوجاندر ودالمبير ولوجرانج ؛ وهذا الأخير تقدم عام ١٨٠٠ ببحث إلى الأكاديمية الفرنسية في ما توهمه برهاناً لها حتى إذا هم بالقائه اعتذر بأنه لا بد أن يعيد النظر فيه . وهذا كله يشهد بفشل كل المحاولات في البرهنة على صحة تلك المسلمة . وكان لا بد لهذا الفشل المتكرر رغم الجهود الجبارة من أن يؤدي آخر الأمر إلى أن يفترض الرياضيون امكان قيام هندسة غير أقليدية تكون فيها المسلمة المذكورة باطلة . والرياضي هالستد Halsted على حق حين لاحظ أن اكتشاف تلك الهندسة أصبح أمراً محققاً في مطلع القرن التاسع عشر . ففي عام ١٨١٦ أتم كارل فردريك جوس (Gauss) الألماني بعد دراسة وثيقة كتاباً لم ينشره خوفاً من صدمة للرأي الرياضي العام أثبت فيه وجود تلك الهندسة غير الأقليدية . ولكن الرياضي الروسي لوباتشفسكي الاستاذ بجامعة قازان كان أول من نشر أبحاثه في تلك الهندسة عام ١٨٢٨ فعرفت باسمه تلك الهندسة التي اكتشفها جوس من قبل والتي تقابل الفرض الثاني من فروض ساكيري .

ولم يمض غير قليل من الوقت حتى اكتشف ريمان عام ١٨٥٤ هندسة أخرى غير أقليدية على أساس الفرض الثالث من فروض ساكيري يقبل فيها على خلاف أقليدس أن المستقيم لا يمتد إلى مالانهاية وانما هو ينتهي حتماً (وهذا عكس المسلمة الرابعة عند أقليدس التي تقبل مد الخط إلى مالانهاية) كما يقبل فيها أيضاً ان كل مستقيمين على سطح واحد لا بد يلتقيان في نقطتين فلا توجد والحالة هذه مستقيمات متوازية بالمعنى الأقليدي . وعلى العكس من ذلك تقبل هندسة لوباتشفسكي عدداً لا ينتهي من المستقيمات المتوازية التي تمر كلها بنقطة واحدة خارج مستقيم ما .

وفي كل من هاتين الهندستين الجديدتين تتتابع القضايا أو النظريات

تتابعاً محكماً كما هو الشأن في هندسة أقليدس ولكنها بالطبع نظريات مختلفة فيما بينها بالنسبه للهندستين الجديدتين، كما أنها تختلف جميعها عن نظريات الهندسة الأقليدية المألوفة لنا .

ومن المعلوم أن المكان (Space) الذي تقوم عليه هندسة لوباتشفسكي انحناء السطح فيه سلبي محض ولذلك فإن تخيل الأشكال الهندسية التي تتحدث عنها غير يسير مع دقة تسلسل قضاياها بيد أنه من الهين تخيل الأشكال في هندسة ريمان عندمقارنتها بهندسة أقليدس لأن المكان فيهما إيجابي . ولكي نتخيل هذا يجب أن نتذكر أننا نعيش في عالم طبيعي كله كرات فالأرض والكواكب كروية الشكل وعلى هذا فالهندسة المعبرة عن مثل هذا العالم كالهندسة الريمانية تكون هندسة واقعية بينما تكون هندسة أقليدس هندسة وهمية أي غير واقعية بالنسبة لعالم الكرات ، مثلاً : —

— تكون المستقيمات الأقليدية الوهمية عبارة عن منحنيات أو أقواس أو دوائر مقفلة في الهندسة الريمانية .

— يكون أقرب بعد بين نقطتين في العالم الواقعي هو القوس الريماني لا المستقيم الأقليدي الوهمي .

— يكون السطح الأقليدي سطح كرة في الهندسة الريمانية فإذا تخيلنا هذا تتضح لنا القضايا الريمانية الآتية : —

— كل مستقيم منته لأنه دائري (وبهذا تسقط المسلمة الرابعة عند أقليدس الخاصة بمد خط إلى مالانهاية) .

— المستقيمان يمكنهما أن يحدا سطحاً أو مكاناً .

— كل المستقيمات تتقاطع في نقطتين ومن ثم لا توجد متوازيات (وبهذا تسقط المسلمة الخامسة) .

ـ مجموع زوايا المثلث تزيد على قائمتين زيادة تتناسب مع كبر أضلع المثلث ولكن المثلث الريماني المتناهي الصغر . مثلث أقليدي .

ـ السطح الريماني له ثلاثة أبعاد بالقياس إلى السطح الأقليدي كما أن المكان الريماني له أربعة أبعاد بالقياس إلى المكان الأقليدي ذي الأبعاد الثلاثة :

هكذا قامت هندسات ثلاث كل واحدة منها تقابل فرضاً من فروض ساكيري . وخواص تلك الهندسات هي : ـ

أولاً : إن مجموع زوايا المثلث تساوي أو تقل أو تزيد على قائمتين على الترتيب .

وثانياً : إن كلاً منها تنطبق على أسطح إنحناء كل سطح منها كما يقول أصحاب الهندسة انحناء ثابت (Constant) وهذا شرط ضروري لانتقال الأشكال فوق أسطحها انتقالاً حراً دون تشويه لها : فهو (أي الانحناء) صفر (أقليدس) وسالب (لوباتشفسكي) وموجب (ريمان) على الترتيب . وعلاقة تلك الهندسات فيما بينها عند المقارنة هي كما بين الرياضي بلترامي Beltrami كما يأتي : ـ

	الهندسة	السطح	الانحناء	مجموع زوايا المثلث
١ ـ	أقليدس	سطح	صفر	قائمتان
٢ ـ	لوباتشفسكي.....	مسطح يشبه الكرة ... Pseudo - sphère	أقل من صفر	أقل من قائمتين
٣ ـ	ريمان	كروي	أكبر من صفر	أكبر من قائمتين

والنتيجة الهامة التي نخلص إليها مما تقدم فيما يختص بأسس الهندسة هي اذن أن المسلمة الخامسة مستقلة منطقياً عن بقية مسلمات أقليدس .

وفكرة الاستقلال هذه هامة جداً لأنها تسمح لنا بأن نستبدل المسلمة

الخامسة بغيرها ويكون البديل عنها إما نقيضاً أو نفياً لها (ريمان) وإما مختلفاً فقط (لوباتشفسكي). فهو نقيض في ريمان لأنه يقول إن كل متوازيين لا بد يلتقيان عند امتدادهما اذ هما مجرد مستقيمين على سطح كروي واحد في حين كان أقليدس يقول إنهما لا يلتقيان مهما امتدا. ثم عند لوباتشفسكي المسلمة البديلة مختلفة فقط عن مثيلتها في أقليدس لأن لوباتشفسكي يقول إنه من نقطة ما خارج مستقيم يمكن إقامة عدد لا ينتهي من المتوازيات في حين كان أقليدس يقول من نقطة ما خارج مستقيم إن متوازياً واحداً فقط هو الممكن أقامته.

على كل حال ثبت الآن أن المسلمة الخامسة مستقلة عن بقية مسلمات أقليدس بحيث إذا ضم بديل أو أكثر إلى المسلمات الأخرى تكونت هندسات مختلفة متتابعة القضايا أو النظريات. وهذا تغير جوهري في أسس الهندسة غير مسبوق مليء باحتمالات أخرى للتغير. ذلك لأنه نشأ بالطبع سؤال جديد وهو هل يمكن إحداث تغيرات أخرى في أسس الهندسة بحيث ينشأ مزيد من الهندسات المنتظمة القضايا؟ مثلاً هل يمكن وضع بديل أو أكثر لمسلمة أو لمسلمات أخرى أو هل يمكن قبول مسلمات جديدة فتنشأ هندسات جديدة؟ ذلك هو السؤال الذي سيطر على كل الأبحاث التالية في الهندسة والذي لقي جواباً إيجابياً أيضاً.

ولكي نلقي ضوءاً على مثل تلك الإجابة دون أن نتورط في تفاصيل فنية في الرياضة ذاتها تبعدنا عن هدفنا في تركيز الكلام حول المنهج والأسس نشير إلى أن الهندسات الثلاث المذكورة سابقاً تفترض كلها أن أشكالها الهندسية يمكن أن تنتقل كلها في عوالمها المكانية دون أن يصيبها أدنى تشويه كما تنتقل الأجسام الصلبة في مكانها الذي حددته كل واحدة من تلك الهندسات. وبما

أن هذه النقلة الحرة شرط للقياس ــ قياس شكل على آخر ــ في أي صورة كان ذلك القياس ، وصور القياس في الهندسات كثيرة كالمطابقة Congruenece والاستـــدارة حول نقطـــة أو ساق Rotation والمساواة Equality والتحويل Transformation والانعكاس Reflection وتبـــادل المواضع Permutation وغير ذلك من العمليات المعروفة عند الهندسيين للقياس ، فان تلك الهندسات الثلاث تلتقي كلها في اسم مشترك هو أنها « هندسات قياسية » (Metrical Geometries) . فينشأ بالطبع عن ذلك الوضع المشترك سؤال أول وهو هل هناك إمكان لإيجاد تعبير عام للهندسة القياسية يكون بمثابة الفكرة المحورية فيها أو بمثابة قانونها العام المولد لها ؟ ومثل هذا السؤال يؤدي حتماً إلى التساؤل : وهل توجد هندسة غير قياسية (Non- Metrical Geometry) ؟ وهذا السؤال الأخير له أهمية لأنه يقودنا إلى الكلام عن بعض الهندسات غير القياسية .

لنأخـــذ مثلاً الهندسية الاسقاطية .Projective Geom . في هـــذه الهندسة على عكس هندسة أقليدس لا تؤخذ المساواة Egalitè في اعتبـــار الأشكال وإنما تؤخذ فقط فكرة المعادلة Equivalenee بينها إذ يكفي أن ننتقل من شكل إلى آخر بالتحويل الاسقاطي Projective Transformation أي أن يكون أحد الشكلين المنظر المسقط للآخر دون مساواة بينهما وهـــذا هو معنى المعادلة ، ومن ثم فان شكلاً ما يعادل أو يناظر آخر في الهندسة الإسقاطية مهما اختلف في حجمه ومساحته وأطواله .

وكثيراً ما يسمى هذا النوع من الهندسة الهندسة الكيفية Gèomotrie Qualitative لأن فكرة الكم تأتي في المقام الثاني بالنسبة للكيف الشكلي في هذه الهندسات غير القياسية . ومع ذلك فان فكرة الكم لم تتلاش نهائياً لأننا

لا نستطيع أن نعرف مثلاً أن خطاً ما هو مستقيم أم غير مستقيم إلا إذا أجرينا قياساً كأن نطبق عليه حرف مسطرة مثلاً وهي آلة قياس .

لكن هناك هندسة تخرج منها فكرة الكم نهائياً مثـل هندسة الوضع Geometry of Situation ففي هذه الهندسة يتعـادل شكلان إذا أمكن الانتقـال من أحدهما إلى الآخر بواسطـة تشويـه مستمر (Continuous deformation) مهما كان هذا التشويه بشرط أن يكون مستمراً أو متصلاً Continuous . وعلى هذا فان دائرة ما تكون معادلة لشكل بيضاوي أو لأي منحن مقفل ولكنها لا تعادل خطاً لأن الخط غير مقفل . كذلك تعـادل الكرة مثلاً سطحاً مقعراً ولكنها لا تعادل عجلة السيارة أو حجر الرحى لأنهمـا مفرغان من الوسط . لنتخيل نموذجـ آ يراد رسمه ثم رسماً لذلك النموذج قام به رسام بدائي فان النسب تتغير والخطوط المستقيمة التي ترسمها يد غير خبيرة تتعرج وتتشوه : هذان الشكلان من وجهة نظر الهندسة القياسية والهندسة الاسقاطية لا يتعادلان ولكنهما يتعادلان من وجهة نظر هندسة الوضع . وهذه الهندسة هامة وذات استعمال واسع .

الهندسة الاسقاطية وهندسة الوضع مثالان لهندسات غير قياسية . مثل هذه الهندسات القياسية وغير القياسية أمكن إيجاد طريقة عامة لمعرفتها عندما أدخل ريمان وجراسمان Grassmann في وقت واحد تقريباًفكرة المكان ذي الأبعاد ن أعني الذي أبعاده أكثر من ثلاثة كأن تكون أربعة (هندسة ريمان) وقد تكون غير متناهية . هذه الفكرة ــ فكرة المكان ذي الأبعاد ن (مهما كان عدد ن) لعبت دوراً هاماً في الأبحاث اللاحقة الخاصة « بكل الهندسات الممكنة ، المعروف منها وغير المعروف . والقياسي وغير القياسي ، تلك الهندسات الممكنة التي تعتبر الهندسات السالفة الذكر (أقليدس ـــ

لوباتشفسكي ــ ريمان ــ الإسقاطية ــ الوضع الخ ..) جزءاً ضئيلاً منهـا (من الممكنات الهندسية) .

هذه الممكنات الهندسية كانت موضع اهتمام كثير من الرياضيين . ولقد عكف الرياضي كلاين Klein على تنسيق الهندسات الممكنة منطقياً بحيث ننتقل من هندسة إلى أخرى حسب مبدأ معين مستعيناً في ذلك بالنظرية الجبريـة المسماة نظرية المجموعات Theory of Groupes فانتهى إلى أن عدد تلك الهندسات الممكنة منطقياً عدد لا ينتهي بالفعل وكل واحدة منها تقوم على مسلماتها الخاصة بها . ولكن لم يدرس أحـد من تلك الممكنات الهندسية الكثيرة جداً إلا أقلها .

ومنذ ذلك العهد بـدأ الهندسيون في القرن الماضي يتحدثون عن أو ينظرون في خواص هندسية مجردة دون الاكتراث لمسألة اتفاقها أو عـدم اتفاقها مع عالمنا الواقعي أو الحقيقي ، كما بدت الهندسة علماً بتلك الخواص الهندسية الممكنـة لا علماً بخواص لموجودات حقيقيـة . ونحن نعلم كم الفارق كبير بين الممكنات الفكرية وبين الوجود الواقعي . بدت الهندسة إذن علماً بالخواص الهندسية الممكنة عقلاً لا علماً بالموجودات ، ذلك لأنهم أمام هندسات عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا وليست واحدة منها أحق من غيرهم في الادعاء بأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقي أو الفعلي كما كان الأمر عند الرياضيين في تصورهم لهندسة أقليدس قبل اكتشاف الهندسات غير الأقليدية . وهكـذا انحسرت أو تقلصت فكرة « الحقيقة » (Verité) في الهندسة عن ميدان المطابقة بين قضايا الهندسة والعالم الواقعي وانحصرت في فكرة « عدم التناقض » بين قضايا هندسة واحدة بعينها ، أعني انحصرت في الإنسجام المنطقي لقضايا نسق هندسي ما فيما بينها .

وهذا تحول خطير في فكرة « الحقيقة » عامة والرياضية أو حتى العلمية خاصة . والرياضي تورينوس Taurinaus (المتوفي عام ١٨٧٤) عبر عن هذا بقوله :

« توجد في الهندسة حقيقة باطنة (Vérité Interne) وحقيقة خارجة (Vérité Externe) . والحقيقة الباطنة هي أن كل هندسة تؤلف نسقاً مقفلاً على نفسه (Système fermé en soi) منسجم القضايا ولا تناقض بينها بحيث لا نتساءل حينئذ عن امكان تطبيقها على الظواهر الخارجية ... ولكن إذا كان لا بد أن نتساءل هذا السؤال الأخير فحينئذ تنشأ مسألة الحقيقة الخارجة التي يصح أن تضاف إلى هندسة ما وتلك مسألة غير رياضية وتتجاوز حدود الرياضة » .

-(١١)-

خلاصة هذا أن مسألة « الحقيقة » التي يمكن أن ننسبها إلى قضايا هندسة ما أصبحت تعني فقط عدم تناقض تلك القضايا فيما بينها ولا تعني اطلاقاً المعنى القديم للحقيقة وهو مطابقة القضايا للواقع أو المكان الخارجي .

إن هذا التصور الجديد للحقيقة الرياضية طعنة نجلاء لنظرية كانط في الحدس المكاني (Intuition Spaciale) التي سيطرت طويلاً على الفكر الرياضي والتي رأت في هندسة أقليدس الهندسة « الوحيدة والضرورية » بسبب تعبيرها عن خواص المكان (Space) أو مطابقتها له . ولا فرق عندنا بين من يرى أن المكان قائم في العالم الخارجي كالواقعيين جملة وعلى رأسهم نيوتن وبين من يقول إن المكان من العناصر القبلية التي يشتمل عليها الذهن الإنساني وحده دون العالم الخارجي ككانط . إذ لا يهمنا هنا في الحقيقة

أن يكون المكان خارجياً بالنسبة للفكر الانساني أو قبلياً (Apriori) فيه وإنما يهمنا فقط أن نرى بوضوح كيف استقلت قضايا الهندسة عن المكان أياً كان ولم تعد تقاس الحقيقة فيها بمدى صلتها بالمكان أو مطابقتها له وإنما تقاس فقط بميزان منطقي صرف هو عدم تناقضها فيما بينها في داخل كل هندسة على حدة . هذا هو معنى الحقيقة الذي أدت إليه نشأة الهندسات وتطورها نتيجة لحركة النقد الباطني التي كانت المسلمة الأقليدية الخامسة نقطة الانطلاق فيها .

ومع ذلك لا بد لنا من أن نشير هنا إلى نظرية كانط في معنى الحقيقة الرياضية نظراً لمدى تأثير كانط الواسع في الفكر الفلسفي البحت وفي الفكر الرياضي أيضاً الذي فلسف أو أهتم بمسائل فلسفية كالتي نحن بصددها هنا في أصول الرياضة . لقد أرادت الفلسفة النقدية بيان أن هندسة أقليدس — ولم يكن يُعرف غيرها في عصر كانط — هي الهندسة الوحيدة والضرورية من حيث هي معبرة عن خواص المكان الوحيد المعطى لنا في حسنا أو فكرنا . وهي لكي تثبت تلك الضرورة المعبرة عن ذلك المكان الوحيد رأت أنه يكفيها أن تبرر كيف أن كل أحكام تلك الهندسة (بل الرياضة كلها) أحكام على حد اصطلاحه « تركيبية قبلية » .

أما أن أحكامها — أو بلغة الهندسة — نظرياتها هي تركيبية لا تحليلية فهذا يتضح من أنه في كل خطوة من خطواتها تثبت نظرية من النظريات صفة جديدة لموضوع هندسي معروف لم نكن لنصل إليها لمجرد تحليل الموضوع وحده ، ولكننا نضيفها إليه من خارجه ونركبها إليه تركيباً جديداً بواسطة ما نستدعيه من مسلمات أو نظريات سبق برهانها وما ننشئه من أعمال كمد خط أو استدارة مثلث على ساق أو غير ذلك . مثلاً لو أخذنا موضوع المثلث القائم الزاوية وحللناه ما وسعنا التحليل فلن نعثر فيه كيف يكون المربع المقام

على الوتر يساوي مجموع المربعين المقامين على الساقين الآخرين . إذ لا بد من إنشاء الأعمال التي ترد الموضوع الحاضر إلى أشكال مألوفة في نظريات سابقة أو إلى المسلمات كما هو واضح من برهان فيثاغورس المعروف في كتب الهندسة ، فنركب بذلك الصفة الجديدة ، أي المحمول ، إلى موضوعه . بعبارة أخرى كان لا بد أن نرجع إلى المكان الحدسي في ذهننا ونمارس نوعاً من التجربة الحدسية فيه التي تمثلها تلك الأعمال لكي نصل إلى هذا التركيب .

بقيت صفة القبلية . فكون تلك الأحكام التركيبية هي أيضاً قبلية أي سابقة على التجربة الخارجية بالحواس ، ومن ثم ضرورتها وكليتها (لأن الضرورة والكلية تجملهما كلمة القبلية) فذلك يتضح من أن المكان الذي ننشيء فيه الأعمال أو نجري فيه التجربة الرياضية الحدسية إنما هو مكان قبلي في ذهننا أو على الأصح في حساسيتنا ، فعلى خلاف نيوتن الذي وضع المكان في العالم الخارجي نجد كانط لكي يؤكد القبلية في أحكام الرياضة يضعه في حساسيتنا كبطانة لها فهذه مهيأة بطبعها بصورتي المكان والزمان كشرطين صوريين مسبقين لتلقي كل إحساس خارجي أو باطني . فنرجع بذلك قبلية الأحكام التركيبية الرياضية إلى قبلية صورتي الحساسية (المكان والزمان) . والمكان بصفة خاصة هو الشرط القبلي لقيام الأشكال الهندسية ، أما الزمان فهو الشرط القبلي لسلسلة الأعداد الطبيعية . والمكان فوق ما يبيحه من إقامة أعمال وأشكال هو الذي تعبر عن خواصه أو طبيعته المسلمات الأقليدية تلك المسلمات التي تستمد منها الهندسة قوتها ووجودها كعلم وثيق : فمن خواص ذلك المكان مثلاً مد خط إلى مالانهاية ، وهي المسلمة الرابعة (لأن المكان لا ينتهي) والمتوازيان لا يلتقيان (المسلمة الخامسة) ، والأبعاد ثلاثة (تعريف الجسمية) والكل أكبر من الجزء ، إلى آخر ما هناك من خواص لهذا المكان القبلي الوحيد عبرت عن مجموعها المسلمات الأقليدية واستمدت منها ضرورتها التي لا سبيل إلى القول بغيرها

فتصبح تلك المسلمات ومن ورائها كل القضايا الهندسية قبلية ضرورية لأنها تعبر عن ذلك المكان القبلي الوحيد . وعلى هذا لا يمكن أن تقوم من وجهة نظر كانط هندسة أخرى غير الهندسة الأقليدية فهي الهندسة بالذات لأن ضرورتها مفروضة علينا بطبيعة تركيبنا الذهني (الحساسية) .

وها نحن نرى الآن كيف تنهار الفلسفة الرياضية عند كانط بعد أن عرفنا أن المكان ليس واحداً إذ هناك من الأمكنة ما أبعاده ن (ن فوق الثلاثة أبعاد) ، ثم بعد أن عرفنا أن الهندسة الأقليدية ليست إلا واحدة من عدد لا ينتهي من الممكنات الهندسية، ثم أيضاً بعد أن عرفنا أن الحقيقة الهندسية تعني اتساق أو انسجام مجموعة من القضايا غير المتناقضة التي تستنبط من عدد من المسلمات ، ثم أخيراً بعد أن علمنا أن المسلمات تختلف من هندسة إلى أخرى ولا يصح أن ننسب إليها صفة الحقيقة بمعناها القديم أي المطابقة لخواص مكان ما لأننا لا نعلم أي مجموعة من المسلسات حقيقية بهذا المعنى وكل ما نستطيع أن ننسبه إلى كل مجموعة منها من معاني الحقيقة هي أنها مجموعة قادرة على تحمل عبء البرهان على عدد من القضايا المعينة دون تناقض بينها، وهذه هي « الحقيقة » التي تلازم كل « نسق إستنباطي فرضي » (ystème hyothético — deductive) كما سبق بيانه ، أي ما يسمى أخيراً بالأكسيوماتيك (Axiomatique) (راجع المقارنة بين نسق أقليدس والمحدثين فقرة ٩) .

—(١٢)—

كما قلنا ليس البحث في منهج الرياضة هو دراسة لطرق حل المسائل الرياضية مسألة مسألة فذلك موضعه دروس الرياضيات. وأنما البحث في منهج

الرياضة هو بحث في الأصول أو الأسس أو المبادىء التي تستند إليها وتستمد منها قوتها . ولقد سبق أن عرضنا لموقف القدماء (أرسطو وأقليدس) من مسألة الأسس والأصول في الهندسة بالذات . ثم في مرحلة تالية بينا كيف أن الهندسيين المحدثين في القرن الماضي في أطار حركة نقد باطنية في الهندسة نفسها وانطلاقاً من المسلمة الأقليدية الخامسة تأدوا شيئــاً فشيئاً إلى إدراك استقلالها عن غيرها من المسلمات وإلى اقتراح أكثر من بديل لها مما أدى بهم إلى هندسات غير متوقعة ، كما تساءلوا عن إمكان تغييرات أخرى في مسلمات غير المسلمة الخامسة ، وكان حصيلة هذا كله نشأة هندسات كثيرة غير أقليدية وغير قياسية ، وظهر معها تصور جديد للحقيقة الهندسية لا يمت بصلة إلى مطابقة المسلمات للمكان سواء أكان واقعياً وخارجياً أم كان قبلياً في الذهن . ولقد جعلنا عنوان هذا الفصل من النقد الباطني إلى الأكسيوماتيك الحديث وها نحن نصل الآن إلى الكلام عن هذا الأكسيوماتيك الذي هو بحث حول المسلمات نفسها من جهات كثيرة .

فلقد تبينـــا فيما سبق أن عدداً يسيراً من الهندسات الممكنة كان موضع الدراسة عند الهندسيين المحدثين وهذه الدراسة تنحصر في تحديد مسلمات كل هندسة معينة من الهندسات وحصر القضايا أو النظريات التي تترتب عليها ويؤلف مجموعها موضوع تلك الهندسة : تلك هي الحركة التي عرفت في تاريخ الرياضة منذ الربع الأخير من القرن الماضي باسم الأكسيوماتيك (Axiomatique) أي مبــاحث تأسيس أو — إن أمكن التعبير — تأصيل الهندسة أي إرجاعها إلى أصول (حسب اصطلاح أقليدس في عنوان كتابه)

وقد افتتح الرياضي الألماني مورتز باش Pasch أبو الأكسيوماتيك الحديث تلك الحركة منذ عام ١٨٨٢ ثم أسهم فيها على غراره رياضيون

ومنطقيون كثيرون من معاصريه من أمثال بيانو Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو وتلاميذه الكثيرون ونخص بالذكر منهم فيلاتي Vailati وبييري Pieri وأنريكس Enriques ، ثم ديفيد هلبرت أستاذ الرياضة بجامعة برلين ورياضيون من أمثال هلستد Halsted وفلبن Velben وغيرهم .

والبرنامج الذي افتتحه مورتز باش هو الذي عبر عنه بألفاظه الآتية :

« إذا كانت الهندسة تريد أن تقوم كعلم استنباطي فيجب أن يكون الاستنباط فيها مستقلاً عن المعنى المألوف للألفاظ الهندسية كالنقطة والخط والسطح الخ ... كما يستقل كذلك عن الأشكال . وكل ما يجب أن يحصر الذهن فيه عند الاستنباط هو العلاقات التي تقوم بين تلك الألفاظ والتي تعبر عنها المسلمات والتعريفات » .

ويفسر مورتز باش هذا التصور الاستنباطي الذي وصفه لنا في تلك الفقرة على النحو الآتي بألفاظه :

« الاستنباط الرياضي غرضه أولاً البرهان على خاصية جديدة لشيء هندسي ما ، وثانياً بيان العلاقة المنطقية بين القضايا . ولذا يجب ألا ينزلق أي خاطر ضمني أعني أي فرض أو قضية حدسية (بديهية) أثناء البرهان إلى جوار المسلمات وما يترتب عليها من قضايا مستمدة منها . فالاستنباط الدقيق يجب أن يبرز فقط تسلسلاً منطقياً للقضايا كما أنه يجب أن يستمد كل قوته من المسلمات المصرح بها منذ البداية دون أدنى استعانة بأي حدس في أية صورة له كشكل مرسوم أو مسلمة نضمرها في أذهاننا أو قضية ندخلها خلسة على أنها بديهية . ومن ثم تجيء ضرورة كون الاستنباط صورياً (Formal) ورمزياً (Symbolic) معاً دون الاستعانة بالأشكال الهندسية كما هو مألوف في هندسة أقليدس تلك الأشكال التي رأى فيها كانط مبرراً لنظريته .

هذا وتلك الصورية (Formalism) يجب أن تمتد كذلك إلى المسلمات نفسها ».

معنى هذا أننا في الهندسة لن ننظر بعد ذلك في أشكال وأعمال وإنمـا فقط في علاقات منطقية صرفة أو كما عبر هو في قضايا صورية ورمزية وتمتد هذه الصورية الرمزية لتشمل المسلمات أيضاً.

وهكذا نرى من هذا البرنامج الذي وضعه مورتز باش ومن تفسيره له كيف انتهى آخر الأمر ذلك النقد الباطني للهندسة، التي هي علم الأشكال الحسية، بالرياضيين أنفسهم من أمثال مورتز باش وتلاميذه إلى إغفال الأشكال وإلى تناول موضوعاتهم في ضوء العلم الصوري الرمزي الشقيق أعني علم المنطق، وهذا هو ما أدى بدوره إلى الاسراع بإصلاح المنطق نفسه وإخراجه من ركوده الطويل كعلم أشبه بعلوم اللغة وتحويله إلى علم رياضي ناضج ليقوم بدوره الجديد الذي أصبح جوهرياً بالنسبة إلى تأسيس وتأصيل الرياضة على نحو يستبعد معاني الألفاظ الهندسية والأشكال الحسية ويستبقي رموزاً صورية وعلاقات منطقية فحسب.

هذا الجانب من تطور المنطق الصوري ليقوم بدوره الهام في تأسيس الرياضة سنفرد له بحثاً لاحقاً (أنظر فقرة ٢٣) ولنعد إلى برنامج مورتز باش. فهذا المؤلف الذي لخصنا برنامجه يضع القاعدتين الآتيتين لتأسيس المسلمات في النسق الاستنباطي الهندسي.

(١) يجب النص صراحة (Explicitement) عن التصورات والألفاظ الأبتدائية (Concepts Primitifs) التي بواسطتهـا سنعرّف كل التصورات أو الألفاظ المشتقة (Derivès) الواردة في هندسة ما.

(٢) يجب النص صراحة عن القضايا الابتدائية (وهي المسلمات)

التي بواسطتها ستبرهن القضايا المشتقة (التي هي النظريات) في كل هندسة معينة. وتلك القضايا الابتدائية يجب أن تعبر فقط عن العلاقات المنطقيـة الصرفة التي توجد بين التصورات الابتدائية المقبولة، كما يجب أن تكون مستقلة عن المعاني المعتادة في القاموس لتلك التصورات (لأن تلك المعاني أشياء حدسية وشخصية تعيق الاستنباط الصوري للبحث).

مثال واحد يكفي لبيان كيفية تطبيق ومراعاة القاعدتين السالفتين :

إذا افترضنا أننا نعرف معاني النقطة والخط والسطح، يمكننا أن نضع المسلمة الآتية :

« إن أي نقطتين في سطح ما إنما تتصلان معاً بمستقيم معين يحتويه بحذافيره ذلك السطح ».

فإذا فرضنا الآن أن كلاً من المستقيم والسطح عبارة عن « طائفة » (Class) من النقط فانه يمكننا أن نترجم تلك المسلمة بعلاقات منطقية صرفة كعلاقتي « الانتماء » (Appartenance) « والاحتواء » (Inclusion) وتصور منطقي مثل « الطائفة » فنقول مثلاً في تلك الترجمة المنطقية الصرفة : « إن نقطتين ما مما « ينتمي » إلى الطائفة « سطح » « ينتميان » أيضاً إلى الطائفة « مستقيم » كما أن العناصر التي تؤلف « المستقيم » « محتواة » في عناصر « السطح ».

وهنا نلاحظ أن الألفاظ نقطة ومستقيم وسطح فقدت معانيها العادية المألوفة في القواميس أعني أنها فقدت صفة كونها حدوساً هندسية أي أشكالاً مكانية لها صلة بالمكان، وحل محل تلك المعاني التصور المنطقي « طائفــة » (Classe). فعندنا الآن من جهة ثلاث طوائف مختلفة (النقطتان . الخط . السطح) ومن جهة أخرى العلاقات المنطقية القائمة بينها وهي (الانتماء »

« والاحتواء » . وعلى هذا النحو لو عبرنا عن تلك الألفاظ وعن علاقاتها أيضاً برموز جبرية بعضها متغير (Variable) وبعضها ثابت (Constant) كما في الرياضة نجد أنفسنا آخر الأمر أمام قضايا منطقية صرفة لا توحي بأشكال هندسية ما إذ هي مستبعدة تماماً هنا . وهكذا تبدو أهمية دور المنطق في ثوبه الرياضي الجديد بالنسبة للعلوم الرياضية .

ولقد حذا كثيرون كما قلنا حذو مورتز باش في تصوره الأكسيوماتيكي (أو التأسيسي) للهندسة ، وعمموا طريقته في تناول الهندسة في صورها المختلفة أعني في تأسيس كل الهندسات على أصول ومسلمات مبتكرة . وبروح كالتي حدت بالفيلسوف والرياضي ليبنتز أن يبرهن كل قضية رياضية وحتى المسلمات نفسها لأنه يرفض البداهة كعلامة لصدق المسلمة عكف هؤلاء الرياضيون على تنقية الهندسة من المسلمات التي قبلها القدماء بسبب وضوحها الحدسي أعني بسبب بداهتها لصلتها بالمكان ، وكذلك على البحث عن مسلمات أخرى أكثر بساطة تلقي ضوءاً على مسلمات القدماء البديهية أو تنتجها . ويمكن تلخيص اتجاهاتهم في مباحثهم الخاصة بتأسيس الهندسات في النقط الأساسية الآتية :

١ ـ البحث عن كل مسلمة مضمرة (Postulat implicit) والنص عليها صراحة (بدلاً من استعمالها ضمناً وإدخالها في البراهين خلسة) وذلك بالنسبة إلى كل هندسة على حدة : مثلاً فيما يختص بهندسة أقليدس بين مورتز باش أنها تضمر مسلمات الترتيب (Ordre) التي لم ينص عليها أقليدس . كما بين هنري بوانكاريه كذلك أنها فاقدة أيضاً لمسلمات النقلة (Deplacement) .

٢ ـ تكوين نسق « كامل » (Système Complet) لمسلمات كل هندسة

عـــلى حدة : مثـــلاً كوّن ديفيد هلبرت D. Hibert عشرين مسلمة لهندسة أقليدس (وهي طبعـــاً تختلـــف عن مسلمات أقليدس نفسه) . كما كوّن بيانو ١٨ مسلمة للهندسة الوصفية (Géom. Descriptive) ، وماريو بييري Pieri ٢١ مسلمة للهندسة الأسقاطية (Géom. Projective) وهكذا .

٣ ــ الاجتهاد في الاقتصاد في عدد المسلمات بأن ترد مسلمات كل هندسة إلى أقل عدد ممكن : مثلاً استطـــاع انريكس Enriques أن يرد المسلمات الإحدى والعشرين المقبولة عند بييري بالنسبة للهندسة الإسقاطية إلى تسع مسلمات فقط . وهذا الاقتصاد في المسلمات لحق أيضاً التصورات أو الألفاظ الابتدائية التي تعرّف في أول النسق كما سنبينه فيما بعد .

٤ ــ العمل على أن تكون المسلمات غير مستمدة من الحدس المكاني كما أراد القدماء وإنما عبارة عن علاقات منطقية كما بين باش . مثلاً يستعمل ديفيد هلبرت علاقتي « الاشتمال » (Appartenanee) أو « التطابق » (Congruence) . ثم أن تلك العلاقات المنطقية إنما تقوم كما بين باش بين عناصر أو تصورات إبتدائية تختار اختياراً عسفياً أو تحكمياً (Arbitaire) كما تمليه إرادة الباحث ، قليلة العدد وتجرد من من معانيها الحدسية المكانية المألوفة في القاموس وينظر إليها كما لو كانت كائنات أو خصائص صورية بحتة لا صلة لها بعالمنا الواقعي ولا معنى لها غير ما تحدده لها العلاقات المنطقية من معنى تقدمه على هيئة مسلمات أذ المسلمات هي التي تحدد معنى الحدود الابتدائية وذلك ببيان كيفية استعمال تلك الحدود . مثلاً لهندسة أقليدس اختار هلبرت النقطة والمستقيم والسطح حدوداً أولية ، واختار فايل Weyl النقطة والمتجـــه الحر (Vecteur libre) وبوانكاريه النقطة والنقلـــة ، وبييري النقطة والمسافة بين نقطتين . في كل هذه الحالات الاختيار تحكمي عسفي وفق ارادة الباحث ولا يوجهه سوى إهتمام الباحث بفكرة دون أخرى.

٥ - إذا تم هذا التأسيس الصوري للمسلمات بالشروط المذكورة آنفاً يعمل الرياضي على أن يستنبط بقوة المنطق وحده أي دون الالتجاء إلى الحدس (كالاشكال المرسومة أو حتى المتخيلة) أو الى أية مسلمة جديدة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الابتدائية ، أن يستنبط قضايا أو نظريات الهندسة التي هي موضع النظر .

هكذا عدل الرياضيون (الذين عملوا على تأسيس الهندسات على تلك الأسس الصورية المنطقية) عن الأشكال والأعمال إلى النظر في مجرد علاقات منطقية صرفة. بهذه المناسبة أنبه إلى أن العدول عن البراهين الهندسية المعتمدة على الأشكال وأنشاء الأعمال الـتي أسهب المناطقة الكانطيون في الحديث عنها تحت اسم التركيب (Construction, Synthèse) والأحكام التركيبيـة والتي لا يزال بعض المنطقيين يرى أنها سر المنهج الرياضي ولبه ، هـذا العدول لم يفهمه بعض المنطقيين المحدثين من أمثال جوبلو Goblot في كتابه Traité de logique الذي اشتهر في فترة ما بين الحربين وهو من المجددين لكانط ولمذهبه في أسس الرياضة ويردد صدى كانط على نحو يختلف بعض الشيء حـين يذهب إلى أن الاستنباط هو التركيب (Deduire c'est construire) أعني أن الاستنباط الرياضي أو المنهج إنما يقوم في جوهره على تركيب أشكال جديدة ترد النظرية موضع النظر إلى أشكال سبقت معرفتها وذلك بواسطة الأعمال (Constructions) وهذا هو الـبرهان الرياضي عنده . وهكذا كما يقول المنطقي Nicod مواطن جوبلو وناقده « بينما لا يزال الفلاسفة الناظرون في البرهان الرياضي يتأملون صفة زائدة وخارجة على صفات ذلك البرهان ، فان الرياضيين أنفسهم قضوا على تلك الصفة لأنهم يرون في الالتجاء إلى الحدس علامة لفجوة أو ثغرة يدخل منها مبدأ أو قضية مضمرة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الأولية ولا تسمح

باستنباطها وهم يحاولون التعبير عن تلك القضية المضمرة في هيئة حدسية ما » .

-(١٣)-

إن الذي وصلنا إليه في هذه المرحلة الخاصة باكسيوماتيك الهندسة هو أن أصحاب هذا العلم الباحثين في أسسه ومبادئه قد افقدوا الألفاظ الهندسية المستعملة في بداية كل نسق استنباطي هندسي معانيها الحدسية أو المكانيـة المذكورة في القاموس والتي يمكن أن ترسم في أشكال كما حولوا المسلمات الهندسية الحدسية (الدالة على أشكال في المكان) إلى مجرد علاقات منطقية .

ونريد الآن أن نواصل بيان هذا الموقف الجديد على نحو آخر يختلف بعض الشيء عما تقدم وإن كان يلقي عليه كل الضوء ، وذلك بالوقوف قليلاً عند اقتراح عجيب لهنري بوانكاريه Poincaré ثم نتابع الكلام فيما بعد عن الشروط المنطقية لإقامة الأكسيوماتيك .

الواقع إن خلاصة ما فرغنا آنفاً من بيانه هو أن كل أكسيوماتيك بالمعنى الحديث يصل إلى درجة من التجرد والعموم والبعد عن الأشكال الحدسية بحيث أنه لا يأخذ معنى أقليدياً أو ريمانياً أو حتى هندسياً أو عددياً أو غير ذلك إلا عند تفسير حدوده الأولية كأن نلصق بها معنى ريمانياً أو معنى أقليدياً أو غير ذلك . وهذا هو الذي وضحه هنري بوانكاريه بطريقته الخاصة التي تختلف عما سبق بيانه ولكنها تبين بكل تأكيد كيف أن الاكسيوماتيك الحديث أفقد الهندسات معانيها الهندسية المألوفة ، وذلك باقتراحه في كتابه العلم والفرض (ص ٥٦ — ٥٨) تأليف قاموس هندسي يعطي كل المعاني الهندسية الممكنة لكل لفظ أو حد من الحدود الأولية ، وللمسلمات المستعملة في كل أكسيوماتيك . وهذا القاموس ييسر ترجمة مسلمات هندسة ما إلى هندسة أخرى وكذلك القضايا أو النظريات المترتبة عليها . كما يسهل أيضاً

ترجمة مسلمات هندسة واحدة بالذات إلى هندسات مختلفة . ومن أمثلة هذا القاموس عند بوانكاريه : مايأتي :

« المكان ... جزء من المكان يوجد فوق السطح الأساسي .

السطح ... كرة تقطع عمودياً السطح الأساسي .

المستقيم ... دائرة تقطع عمودياً السطح الأساسي .

الكرة ... الكرة .

الدائرة ... الدائرة .

الزاوية ... الزاوية .

الخ » .....

يقول بوانكاريه إنه بمثل هذا القاموس يمكن أن نترجم نظريات لوباتشفسكي إلى لغة أقليدية والعكس بالعكس، تماماً كما نترجم نصاً ألمانياً إلى الفرنسية ، والعكس بالعكس بواسطة قاموس ألماني فرنسي، ويمكن تأليف قواميس مشابهة أخرى .

هذا الاقتراح الذي جاء به بوانكاريه يؤكد مرة أخرى أن الهندسة عند الأكسيوماتيكيين المحدثين أصبحت شيئاً مجرداً وصورياً، أي بعيداً كل البعد عن حدس المكان في أي صورة له . وهكذا ننتقل من هذه النقطة إلى بيان الشروط المنطقية أو الصورية التي يجب أن تتوافر في أقامة نسق أكسيوماتيكي من هذا النوع .

-(١٤)-

لقد تبينا فيما تقدم أن المسلمات في الأكسيوماتيك الحديث كما وضح مورتز باش تتكون من علاقات منطقية بين حدود أولية كالنقطة والخط

والحركة الخ ... ، قليلة في عددها ، وتختار اختياراً عسفياً وفق وجهة نظر الباحث ، كما تجرد عن معانيها الحدسية أو الهندسية ، وتتصور كمعان منطقية.
هذا الجانب الصوري من الأبحاث المتعلقة بأسس الرياضة وطرقها أثار مسألة منطقية أخرى هي الشروط المنطقية التي يجب أن تتوافر في تأسيس أو اختيار المسلمات . ومن ثم فنحن ننتهي الآن إلى أن ندرس في اختصار الشروط المنطقية التي يجب أن تراعى عند تأسيس الأكسيوماتيك وهي على الترتيب :

(١) استقلال كل مسلمة عن الأخرى .

(٢) عدم تناقض المسلمات .

(٣) الشرط الذي سماه هلبرت شرط « الإشباع » (Saturation) أي كون عدد المسلمات الخاصة بهندسة ما هو ما يكفي بالضبط لاستنباط نظريات تلك الهندسة بحيث لا يمكن زيادتها أو نقصانها إلا وأدى ذلك إلى قضايا هندسة مخالفة .

نريد الآن أن نتناول كل شرط من تلك الشروط على حدة .

لقد تنبه أصحاب الهندسات غير الأقليدية في القرن الماضي إلى بعض هذه الشروط عندما بين ريمان مثلاً أن نفي المسلمة الخامسة يؤدي إلى هندسة منسقة القضايا غير أقليدية . ومن قبل هؤلاء في القرن السابع عشر تنبه الفيلسوف الرياضي المنطقي ليبنتز إلى بعضها مثل شرط عدم التناقض : فإن ليبنتز كان يطمح في برهان كل قضية ممكنة وحتى المسلمات الرياضية – لكي لا يقبل قضية من غير برهان – وذلك بأن يردها إلى الهوية أي الذاتية (Identité) ببيان أن محمولها لا يتناقض وموضوعها . وإنما يتأتى هذا بأن يجد تصور المحمول مكاناً طبيعياً ومنطقياً في تصور الموضوع فيكون بذلك جزءاً من هويته أو ذاتيته . ويتضح من ذلك أن ليبنتز لم يكن يقصد عدم

تناقض مسلمة مع أخرى وإنما كان يقصد عدم تناقض مسلمة بعينها في ذاتها أو مع ذاتها .

أما الأكسيوماتيك الحديث فإنه لا يُعني بمسألة حقيقية المسلمة في ذاتها لأنه لا يعني بمسلمة منفردة كما كان يفعل ليبنتز وإنما يُعني بطائفة من المسلمات مجتمعة معاً لتأسيس نظرية رياضية واحدة ، ومن ثم كانت مسألة إلتئام تلك المسلمات معاً، أي عدم تناقضها فيما بينها، هي المسألة المنطقية الأولى والهامة في أقامة النسق الأكسيوماتيكي . ولكن كيف نعرف أن طائفة من المسلمات غير متناقضة فيما بينها ؟ هذه مسألة عسيرة جداً كما بينت دراستها، فإن هلبرت يعرف عدم التناقض بقوله إنه « استحالة إستنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات أي تكون نفياً كلياً أو جزئياً لإحدى المسلمات » . وإذن لا يمكن البرهان مباشرة على عدم تناقض المسلمات فيما بينها وإنما يكون ذلك فقط بطريق غير مباشر وهو عدم العثور على قضية مستنبطة منها وتكون نفياً لإحداها . وواضح أن مثل هذا البرهان غير أكيد ولا حاسم لأننا إذا كنا لا نعثر في الحالة الحاضرة لطائفة من المسلمات الخاصة بنظرية رياضية ما أية قضية مستنبطة منها تكون متناقضة معها فإننا لا نستطيع أن نجزم باستحالة ذلك في مستقبل قريب أو بعيد .

مثل هذا الاعتراض جعل هلبرت يفكر في طريقة أخرى مباشرة للبرهان على عدم تناقض طائفة من المسلمات فيما بينها وهذه الطريقة هي أن نعطي للمسلمات تفسيراً مشخصاً في هذا العالم فنبين أنه توجد أشياء في عالمنا هذا تنطبق عليها المسلمات . وهذا التفسير هو الكفيل في رأيه بعدم تناقضها . وأفضل التفسيرات الممكنة عنده التفسير العددي ، لأن الأعداد كما يقول نموذج اليقين عند الرياضيين وبها يقيسون صحة كل قضاياهم .

إن هذا الأسلوب في تفسير المسلمات بالأعداد للتحقق من عدم تناقضها

ليس غريباً على كل من حاول حل مسألة جبرية وأراد أن يتحقق من صحة النتيجة باستبدال الحروف بالأعداد .

هناك بالطبع أعتراض جوهري على ما ظنه هلبرت طريقاً مباشراً للبرهان بقبوله تفسيراً عددياً للمسلمات وهو أن الأعداد نفسها جزء من أهم أجزاء الرياضيات التي يراد تأسيسها كلها على أسس أكسيوماتيكية فكيف تتخذ معياراً أو محكاً لليقين بعدم تناقض المسلمات في أي فرع من فروع الرياضة ؟ أليست الأعداد نفسها في حاجة إلى مسلمات ؟ ألم يعرف التاريخ القريب محاولات مختلفة لإقامة مسلمات تنتج الأعداد ؟ إذن يجب أيضاً استبعاد التفسير بالأعداد كبرهان على عدم تناقض المسلمات .

على كل حال يبدو أنه لا يوجد إلى الآن أي طريق مباشر للبرهان بيقين على عدم تناقض المسلمات ، والباب مفتوح أمام مزيد من البحث .

هذا وشرط عدم التناقض عند هلبرت شرط متضمن في الشرطين الآخرين : الاستقلال والإشباع . فإن هلبرت يقول إن مسلمة ما تعتبر « مستقلة » عن المسلمات الأخرى إذا كان نفيها يؤلف مع هذه المسلمات الأخرى مجموعة غير متناقضة . (لنتذكر المسلمة الخامسة عند ريمان فهي نفي للمسلمة الخامسة عند أقليدس) . ويقول هلبرت إن طائفة من المسلمات تصل إلى درجة « الإشباع » إذا كانت أضافة أية مسلمة جديدة تؤدي إلى جعل تلك الطائفة متناقضة .

لنمتحن عن قرب فكرة الاستقلال : هي فكرة عرفها أصحاب الهندسات غير الأقليدية . فهم عند محاولتهم البرهان على المسلمة الخامسة توصلوا إلى اكتشاف استقلالها عن غيرها من المسلمات الخاصة بالمستقيم والسطح والتطابق وغير ذلك مما يسمح ببرهان الثماني والعشرين نظرية الأولى في

أقليدس دون ما يليها مما يحتاج إلى المسلمة الخامسة . فأدركوا عندئذ أن برهان استقلال المسلمة س عن المجموعة ص إنما معناه عدم تناقض ص مع لا س . وهذا هو ما أدى إلى هندسة ريمان مثلاً . ومنه أخذ هلبرت تعريف استقلال المسلمة . هذا هو رأي هلبرت في معنى استقلال المسلمة .

ولكن يعترض بعض الرياضيين على فكرة الاستقلال نفسها فيقولون إذا كانت كل مسلمة مستقلة حقاً في معناها عن غيرها في طائفة من المسلمات فإنه يمتنع الاستنباط بسبب عدم الاشتراك أو الاتصال بين معاني مسلمات الطائفة المذكورة . وإذن فلا بد أن يكون هناك إشتراك ما – لا استقلال أو انفصال تام – بين طائفة من المسلمات بحيث يمكن استنباط قضايا أو نظريات منها . وهذا الاشتراك ربما أمكن فهمه في ضوء التمييز الذي ذهب اليه الرياضي الإيطالي ببو ليفي (Beppo Levi) بين الاستقلال المطلق والاستقلال المرتب (Independ. Ordonnée) أما الاستقلال المطلق فمستحيل معه الاستنباط لأن المسلمات تكون حينئذ غير مشتركة في شيء ما ، أما الاستقلال المرتب فهو الذي إذا توافر لدينا ا ب جـ كطائفة من المسلمات لنظرية ما ، يريد ببساطة أن يقول إن ب لا تنتج عن أ وإن جـ لا تنتج عن ب أي أن هناك ترتيباً في الاستقلال كما هو واضح . وهذا لا يمنع بالطبع امكان استنباط أ من ب و حـ معاً ، ومثل هذا هو مـــا يسمح بالاشتراك بعض الشيء في المعنى .

على كل حال يبدو أن الاستقلال خاصية نسبية واقتصادية وجمالية في آن واحد أكثر منها خاصية حقيقيـــة أو منطقية أو أي شيء آخر من هذا القبيل . أما أنها نسبية فلأنه لا يمكن أن يكون هناك استقلال مطلق لما يؤدي إليه مثل هذا الاستقلال من امتناع الاشتراك في المعنى مع بقية مسلمات الطائفة . أما أنها أقتصادية فلأنه من الأقتصاد الفكري أن لا تكرر مسلمة

شيئاً مما تقوله الأخرى فيكون هناك الحد الأدنى فقط من المسلمات . أما أنها قيمة جمالية بالأضافة إلى ذلك فيرجع إلى أن في الاقتصاد جمالاً وأناقة كما في استقلال المسلمة إستقلالاً نسبياً كذلك . على كل حال ليس هناك رأي حاسم في هذا الشرط .

بقي الإشباع وهو أقل الشروط حظوة في مناقشات هلبرت . وأول معانيه عنده هو أن طائفة معينة من المسلمات تكفي بمفردها بالقيام بمهمة استنباط قضايا أو نظريات فرع معين من فروع الرياضة . ثم توسع هلبرت بعد ذلك في معناه بحيث تضمن فكرة أن أية مسألة أو نظرية تثار في داخل فرع ما يجب أن يفصل فيها بالسلب أو بالإيجاب على أساس تلك المسلمات نفسها . وتحديد هذه الفكرة عسير بعض الشيء ولكن يمكن القول بأنه يريد أن يقول إن فرعاً رياضياً ما إنما تصل مسلماته إلى درجة الإشباع إذا تعذر لقضية ولنقيضها معاً أن ينتجا في آن واحد عن المسلمات . على كل حال لا تزال مسألة الاشباع موضع نقاش مفتوح لدى الرياضيين .

نرى من هذا أن الشروط الثلاثة وهي عدم التناقض والإستقلال والإشباع متصلة متداخلة فيما بينها وأنها لا تزال موضع نظر من قبل من يهمهم الأمر بحيث يعسر أن يبت فيها بكلمة نهائية وفاصلة من وجهة نظر الرياضيين أصحاب الشأن .

والآن بعد هذه الجولة في صميم الأبحاث الخاصة بتأسيس الهندسة لا نقول إننا استنفدنا كل ما يمكن أن يقال عن هذه المسألة من تفاصيل كثيرة من وجهة نظر المناهج . ولكنني أعتقد أنني جلوت الكثير مما غمض من مسائل ، وروضت الكثير مما يستعصي فهمه إلا على الرياضيين . وبينت أن المطلوب الأول في فلسفة الرياضة الإحاطة بالأسس البعيدة التي تستند اليها الهندسات ، كما بينت

الفارق بين موقف القدماء وموقف المحدثين ، وأن موقف المحدثين الذي سماه المناطقة النسق الاستنباطي الفرضي إنما درسناه تحت الاسم المفضل عند الرياضيين وهو الأكسيوماتيك، وبينت كيف أن الحركة الأكسيوماتيكية التي تميزت باتجاهات عديدة إنما ثمرتها الأخيرة الحاسمة إبتعاد الهندسات عن الحدوس المكانية والبراهين المستندة إليها مع إلتحامها إلتحاماً وثيقاً بالمنطق الصوري وحده بحيث أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية بالغة التجريد والبعد عن الأشكال المكانية إلى حد أن رياضياً مثل بوانكاريه أقترح قواميس للمسلمات والحدود الأولية لإمكان ترجمة هندسة إلى أخرى ، وبينت في خاتمة المطاف الشروط المنطقية لإقامة نسق من المسلمات المنطقية المجردة على ذلك النحو، تلك الشروط التي ما كانت توجد وتوضع موضع البحث لولا أن أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية صرفة. ومن كل هذا يتضح أننا عندما نبحث في منهج الهندسة فمعنى ذلك أننا نؤسسها كنسق استنباطي على مسلمات لا تمت للواقع الخارجي بصلة وإنما فقط إلى المنطق الصوري وحده. وهذا ما يضيء فكرة الحقيقة الهندسية بضوء جديد في أطار نظرية عامة للمعرفة الرياضية مؤداها أن التصورات الرياضية تصورات من طبيعة منطقية أو صورية بحتة .

الفصل الخامس

تحسيب الرياضة وأكسيوماتيك العدد

(١٥) الجبر والهندسة التحليلية . (١٦) النقد الباطني في التحليل ينتهي إلى نبذ فكرة «الاتصال الهندسي» ويستعيض عنها بالأعداد. (١٧) دور الأعداد التخيلية في تحسيب الرياضة . (١٨) برنامج المذهب الحسابي ومثال رد الأعداد التخيلية الى الأعداد الصحيحة . (١٩) رد الأعداد الصماء الى الأعداد الصحيحة . (٢٠) نظرية الأعداد اللامنتهية دعم للمذهب الحسابي . (٢١) أكسيوماتيك العدد.

-(١٥)-

إن ألفاظ هذا العنوان ستتضح فيما بعد . ونبدأ الآن من القول بأن الخطوات التي تتبعناها من النقد الداخلي إلى الأكسيوماتيك الحديث في الهندسة يمكن أن نتتبع مثيلتها في علم « التحليل » (Analyse) .

لقـــد كان ديوفانت Diophante الرياضي الإسكنـــدري صاحب الكتاب المعروف باسم « ارتمطيقـــا » (Arithmetique) أي الحساب ، أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما إلى كميات أخرى معلومة . ولكنه وقف في معالجته لمثل هذه الفكرة (التي أثمرت الجبر) عند الطرق

الطوائف المنطقة Classes والعلاقات التي تقوم بينها مما سبقت الإشارة اليه (فقرة ١٢) . وهذا هو بالضبط الطريق الذي ينتظر التحليل أيضاً منذ ثورته على حدس الاتصال . ولكن طريق التحليل أطول وأشق كما سنرى .

فلنعد إلى كلمة ديرشليه : إن مغزاها هو أن علماء التحليل في مرحلة تنقية علمهم من حدس الاتصال إنما ولوا وجوههم شطر الأسس والأصول التي يقوم عليها علمهم ناقدين وفاحصين، على عكس من سبقهم من علماء التحليل الذين لم ينتبهوا إلى هذه الناحية بل اتجهوا دائماً الاتجاه الآخر والطبيعي أعني ناحية تنمية علمهم بالاكتشافات وإمداده بأنواع من الحساب جديدة لينهض بتبعاته حيال تقدم العلوم الطبيعية . وذلك الاتجاه الجديد النقدي الفاحص للأسس والمبادىء أمد الرياضة القائمة فعلاً بأفكار جديدة لأسسها على خلاف الإتجاه الآخر الذي يمدها بالمزيد من أنواع الحساب . وهذا هو مغزى عبارة ديرشليه التي سنتوسع فيما يلي في تفصيلها وفهمها .

—(١٧)—

إن الاتجاه الجديد الذي عبر عنه ديرشليه أحسن تعبير أصبح مفروضاً أومحتوماً على الرياضيين منذ امتداد فكرة الدالة الى ميدان العدد التخيلي Imaginary number أى المركب Comeplex .

لقد قيل إن كوشي Cauchy كان يستمد كل قوته الرياضية مما كان يخيف غيره من الرياضيين أعنى من الأعداد التخيلية أو المركبة . والواقع أن إحدى مفاخره في الرياضة أنه وسع من أفق نظرية الدوال بأن وضع دالة أحد إحداثييها عدد تخيلي وأسماها الدالة التحليلية Fonction Analytique

لقد كان العدد التخيلي معروفاً من قبله : فقد أسماه ديكارت بهذا الاسم

والمقابلة » ليدل بهما على طريقتين خاصتين باستخلاص المجهول : واللفظ الأول الذي قدر له الخلود كما يؤخذ من معناه في اللغة العربية هو أن يجبر أو يكمل كل طرف من طرفي المعادلة وذلك بأن تنتقل المقادير الناقصة من طرف إلى آخر بالزيادة فلا تبقى في الطرفين غير الأعداد بالزيادة . وأما المقابلة فهي طريقة أخرى تقوم على حذف المقادير المتماثلة أي « المتقابلة » في طرفي المعادلة . وهاتان طريقتان توقف قيام الجبر على استخلاصهما ومراعاتهما ويغنيان عن البراهين الهندسية .

ولكن الخوارزمي كان « يتكلم » الجبر أيضاً لأنه لم يهتد إلى الرموز الهجائية .

لذلك يقترن الجبر في العصر الحديث باسم مكتشف آخر هو الرياضي الفرنسي فيت Viète الذي عاش قبيل ديكارت بنحو نصف قرن فهو أول من خلص تلك الطريقة من استعمال ألفاظ اللغة وحتى من أعداد الحساب حين استعمل حروف الهجاء للدلالة على الأعداد وحين أدخل بعض العلامات الدالة على العمليات التي تجري على تلك الحروف . فأثمر ذلك كله أنه ميز عما كان يسمى حينئذ LogisticaNumerosa أي حساب العدد وهو علم الحساب ، العلم الآخر المسمى Logistica Speciosa أي علم الأنواع (باعتبار أن الحرف الهجائي بمثابة نوع لأعداد غفيرة) أعني علم الجبر والرمز . وارتفع بهذا الأخير إلى مرتبة من التجريد والعموم لا تعهد في الحساب العددي واتضحت بذلك قوانين أو علاقات بين المقادير العامة بطريق المعادلة لم تكن ميسورة في حساب الأعداد مثل قانون الاقتران (Law of association) الخاص باختلاف اقتران الحدود داخل الأقواس بحيث لا تتغير القيمة التي يشير اليها طرفا المعادلة كما في :

(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

وكذلك مثل قانون التوزيع Law of Distribution الخاص بالتوزيع بـــين الجمع والضرب كما في :

(أ + ب) (جـ + د) = أ جـ + أ د + ب جـ + ب د

ولكن جبر فيت سرعان ما توقف أمام عقبات جاءت من اقتران الجبر والعمليات الجبرية في ذهنه بالأشكال الهندسية التي لم يستطع فيت التخلص منها . وفي هذا يقول الرياضي برنجشهيم Pringsheim في دائرة المعارف الرياضية التي ظهرت تحت إشراف الرياضي مولك Molk باللغة الفرنسية في أوائل القرن العشرين والتي استعرضت أجزاء الرياضيات كلها مسلسلة مرتبة ، يقول (في المجلد الأول ص ٤٠) : « إن فيت هو الذي علمنا كيف نحسب بالحروف الدالة على الأبعاد دون أن نخرج عن حدود النظر في الحروف نفسها . وذلك باستعمال رمز خاص يسمح بأن نطبق العمليات الرياضية على الحروف كما لو كانت الحروف ممثلة لأعداد معينة . ثم إن فيت هو صاحب الفكرة في تجديـــد طريقة القدمـــاء [الإشارة إلى طريقة ديوفانت] وذلك بإذابتها في الجبر الجديد . ولكن فيت وقف مع ذلك في منتصف الطريق عند خطوته الأولى وذلك لأنه لم يعرف كيف يتخلص على نحو كاف من التفسير الهندسي للعبارات الجبرية ذلك التفسير الذي كـــان مألوفاً عند القدماء : فهو عندما جعل حرف أ مثلاً في مقابل خط مستقيم ، بدا له أن يجعل (أ . أ) مثلاً في مقابل المربع و (أ . أ . أ) في مقابل المكعب ... هذه المقابلات منعته من أن يعطي للعلم الذي بعثه وجدده كل ما هو جدير به من صفة العموم والتجريد » .

هذه الفقرة المقتطفة من كلام برنجشهيم التي تبين فضل فيت في إدخال الحروف الجبرية وأيضاً في استعمال رموز للعمليات وبذلك أستقام له الجبر كعلم . تبين في الوقت عينه لم توقف فيت عند خطواته الأولى نتيجة لاقتران

هذه الحروف والعمليات التي تجري عليها بأشكال هندسية تقابلها بالضرورة مما حد من قدرة هذا العلم عند مالا توجد أشكال هندسية لأعداد أو عمليات مثل أ ٤ اذ الخيال يعجز أن يجد شكلاً هندسياً بعد المكعب المعبر عنه بالعدد أ ٣ أو (أ . أ . أ) . إن هذه الفقرة التي تبين عدم استطاعة فيت التخلص من الهندسة حين كان يفكر جبراً هي فقرة هامة جداً من وجهة نظر أبحاثنا القادمة لأنها تبين كيف أن الجبر أو علم التحليل كله لا يمكن أن يتقدم إلى الأمام إلا إذا تخلص نهائياً عند تأمل رموزه، حروفاً وعمليات، من النظر في أشكال هندسية، أي عندما يتخلص من «حدس المكان» كما يصطلح كانط الذي سبق أن عرضنا نظريته وأثرها في الفكر الحديث فيما يختص بأسس الرياضة .

وفي الواقع إنما يرجع الفضل في تخليص الجبر من العوائق الهندسية إلى رينيه ديكارت في اكتشافه الهندسة التحلية التي حولت الرياضة الحديثة كلها من النظر في أشكال مكانية إلى النظر في التحليل الذي هو تنسيق عام لكل العلاقات الموجودة بين المقادير أيا كان نوعها فأحل ديكارت التحليل بذلك المحل الأول في الرياضيات الحديثة وتراجعت الهندسة من مكانتها القديمة في الريادة أو القيادة للفكر الرياضي . ونقطة البدء في هندسة ديكارت هي التي عبر عنها في أوائل كتابه المسمى « الهندسة » حيث يقول : « كل مسائل الهندسة يمكن أن يعبر عنها على نحو يكفي معه أن نعرف عدداً معيناً من الخطوط المستقيمة لكي نحصل على التركيب المطلوب الحصول عليه . وكما أن الحساب يُرد الى أربع أو خمس عمليات فكذلك الهندسة تُرد بالمثل إلى العمليات نفسها نجريها على خطوط مستقيمة ينظر اليها كأنها أعداد فحسب . وعلى هذا فإذا كان أ و ب يمثلان خطين مستقيمين فـإن أ + أ أو أ × أ لا يمثلان مستطيلاً أو مربعاً وإنما خطاً مستقيماً نسبته الى أ كنسبة ب إلى الوحدة (وحدة القياس) . وكذلك العوامل والجذور والأسس فإنها تمثل

جميعها خطوطاً مستقيمة . وبالجملة نتائج العمليات هي دائماً مستقيمات ».
وهكذا لم تعد الهندسة تلعب دوراً جبرياً كما هو الشأن في تصور فيت ، ولكن لا يمنع هذا من استعمال العبارات الهندسية الدارجة مثل مربع ومكعب وغير ذلك للتعبير عن رموز جبرية مثل $١^{٢}$ و $ب^{٣}$ الخ ... على شريطة ألا نفهم من هذا التعبير إلا خطوطاً مستقيمة فحسب كما يريد ديكارت .

إن هذا الرأي الذي عبر عنه ديكارت في أوائل كتابه « الهندسة »هو من وجهة نظر تاريخ الرياضة أكثر ثورة مما يبدو للنظرة العادية ذلك لأنه استبعد كل الأشكال الهندسية من النظر في التحليل ، عدا المستقيم طبعاً ، كما أنه وضع أهم مبادىء مقابلة الأعداد للإحداثيات ، أعني تقابل مستقيم ما لأي عدد مهما تكن طريقة الحصول على ذلك العدد : فالعدد أ يقابله مستقيم وكذلك العدد أ + ب أو العدد أ × ب أو العدد $\sqrt{٢}$ الخ ... وهذا هو بداية الرياضة الحديثة .

يمكننا الآن أن نشير في مثال محدد إلى موقف الهندسة التحليلية التي هي ثمرة التخلص من الحدس الهندسي (الأشكال المكانية) بحيث يصبح النظر قاصراً على رموز الجبر دون حاجة إلى الرجوع إلى الهندسة وبراهينها في حل مسائل التحليل. فالمعادلة $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$ يقتضي حلها في الهندسة التقليدية أن يرسم الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي يضم الأشكال الرباعية: ١ + ٢ + ٢ + ٣ .

	س	ص
س	١	٢
ص	٢	٣

أما في الهندسة التحليلية فلا ننظر في أشكال مربعة ولا نتجاوز النظر في مجرد مستقيمات نرمز اليها عـلى الترتيب س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} . وهذه المستقيمات تمثلها عندنا أعداد فحسب وتذكرنـا « بالإمتداد » الديكارتي الذي جعل منه ديكارت جوهر العالم المادي أو الخارجي في فلسفته .

إنه منذ الهندسة التحليلية أخذت الرياضيات تخطو إلى الأمام بخطى سريعة. قال تزيتن (Zeuthen) الرياضي ومؤرخ الرياضة : « إنه منذ ديكارت انتقلت الرياضة من مرحلة الحرفة الصغيرة الى مرحلة الصناعة الكبيرة » وهو يقصد بذلك أن اكتشاف ديكارت فتح أمام الرياضيين كل وسائل التقدم السريع المطرد لأن الرياضة لم تعد حبيسة الأشكال الهندسية بعد أن تحولت إلى تحليل وانطلقت مع انطلاق الأعداد المختلفة الكثيرة التي لا تمثلها أشكال هندسية ما تعوق التفكير الرياضي وتحدّ من قدرته .

لقد خطا التحليل بعد ديكارت خطوات واسعة فنشأ حساب التكامل والتفاضل وتقدمت نظرية الدوال (Theory of Functions) طوال القرنين السابع عشر والثامن عشر . وكلهـا اكتشافات عظيمة الأهمية نسكت عنهـا هنا لأنها لا تهمنا من وجهة نظر نشأة النقد الباطني في التحليـل ومسألة المناهج والأسس أو الأصول التي نقصد اليها هنا . ذلك لأن الإنتباه الى مثل هذه الموضوعات الأخيرة عند الرياضيين أنفسهم لم يظهر إلا في أواسط القرن التاسع عشر عندما أخذ الرياضيون يهتمون بالجانب المنهجي والمنطقي للحساب والتحليل . فهم إلى ذلك الوقت كانوا يثقون كل الثقة ويركنون في اطمئنان لا مزيد عليه الى النتائج الباهرة التي توصلوا اليها بواسطة التحليل في الهندسة التحليلية وحساب التكامل والتفاضل ونظرية الدوال التي نمت كلها على مر الأيام وطبقوها هم أنفسهم بنجاح موفور في مختلف ميادين العلم الطبيعي

الجديد دون أن يكترثوا في الوقت عينه أدنى اكتراث لنقدها وفحص أسسها التي تستند اليها وبالجملة لمناهجها . وفي الواقع كان تقدم الرياضيات منذ القرن السابع عشر رهناً بتقدم الطبيعيات وخاضعاً لحاجاتها إذ كانت الطبيعيات هي التي تملي على الرياضيين الحاجة إلى المزيد من الكشوف الرياضية . فقنع الرياضيون بإسهامهم في حل مشاكل الطبيعيات وإشباع حاجاتها أولاً بأول دون أن يشعروا بحاجتهم هم أنفسهم إلى نقد مناهجهم الرياضية وفحص أسس علمهم ومواجهة حاجات الرياضيات في ذاتها مستقلة عن الطبيعيات . فكانت الرياضيات إلى ذلك العهد تتألف من قطع متناثرة لا وحدة بينها ولا يتبع في نظرياتها المتباعدة نهجاً موحداً حتى قال رياضي إنجليزي حديث هو فيليب جوردين (Philip Jourdain) في بحث مسلسل وممتاز عن أسس الرياضة Foundation of Mathematics في مجلة العلوم الرياضية ١٩٣٠ : « إنه إلى منتصف القرن التاسع عشر لم يكن علم أضعف منطقاً من علم الرياضة » . فلا عجب إذن إذا رأينا الفلاسفة الذين اهتموا بالرياضة قبل ذلك الوقت قد ذهبوا مذاهب شيء في طبيعتها وأصولها وطرقها فجاءت نظرياتهم غير مقبولة وغامضة ، وأحياناً ضد تقدم الرياضيات أيضاً ، وساعدت بذلك كله على إشاعة الغموض عند الكثيرين من الفلاسفة والرياضيين المحدثين الناظرين في أسس الرياضة .

-(١٦)-

في الوقت الذي نشأت فيه هندسات غير أقليدية في أواسط القرن الماضي نشطت أيضاً معاول الهدم في التحليل وكانت نظرية الدوال Theory of Functions هي مركز ذلك النشاط ولذلك سنتخذها نقطة البداية لحركة

النقد الداخلي في التحليل كما اتخذنا من قبل المسلمة الخامسة عند أقليدس بداية لحركة النقد الداخلي في الهندسة .

لقد كانت فكرة « الاتصال الهندسي » Continuité Géométrique هي الجذر البعيد والمشترك بين الهندسة والتحليل . وفكرة « الاتصال الهندسي » هذه اصطلاح حديث عند الرياضيين ولكنه يدل على شي قـديم في الفكر الرياضي إذ يدل على الكم الذي سمي منذ أرسطو متصلاً في مقابل الكم المنفصل (العدد) ، ولكن يجب الآن أن نفهم فقط من هذا الأصطلاح ذلك المستقيم الذي استبقاه ديكارت في هندسته التحليلية بعد أن أستبعد الأشكال الهندسية الأخرى ، وعلى وجه أدق يجب الآن أن نفهم من ذلك الاصطلاح عـدم وجود أدنى فجوة أو انفصال (Discontinuité) في تتابع قيم دالة من الدوال كما تتتابع نقط مستقيم ما دون فجوة بينها مما يستبقي دائماً حدساً بخط متتابع النقط سواء أكان الخط مستقيماً أم منحياً ، أعني بالطبع يستبقي حدساً هندسياً ما .

ولقد رأينا كيف أن التصور الأكسيوماتيكي الحديث في الهندسة قد تخلص من الحدس الهندسي أو المكاني (نقطة — خط — سطح) بإن أحاله إلى فكرة «الطوائف المنطقية» Classes logiques وما يتبع هذه الفكرة من إقامة علاقات منطقية في صورة مسلمات (الفقرة ١٢) ، أما التحليـل فقد كان يعتمد كل الإعتماد أيضاً على ذلك الحدس الهندسي للاتصال الذي استبقاه ديكارت في هندسة التحليلية أو الجبرية كما وضحناه . فنظرية الدوال كلها إلى منتصف القرن الماضي إنما كانت تعبر عن هذا الإتصال الهندسي وتستمد منه وجودها . ولفظ « دالة » Function من وضع الفيلسوف الرياضي ليبنتز وقصد به المنحنى Curve الهندسي الذي يعبر عن علاقات « متصلة » متتابعة بين

كمّين متغيرين (Variables) س و ص يسميان بالإحداثيين Coorodinates كما يقال في اصطلاح الرياضة . فلو أخذنا مثلاً عوضاً عن س و ص شيئين محددين مثل حرارة الغاز والضغط فان العلاقة التي تنشأ من تغير أحدهما عند تغير الآخر ترسم خطاً « منحياً » هو « دالة » في عرف الرياضة وهذه الدالة « متصلة » اتصال الخط المنحني الهندسي بحيث أن الدالة تكون لها قيمة معينة في كل نقطة من نقط المنحنى ، وبعبارة أخرى هي تجتاز قيماً عددية متتابعة لا فجوات فيها أي تعبر خطاً هندسياً . طبعاً عدد التجارب عن الحرارة أو الضغط محصورٌ ولكن الخط الداخلي الذي يربط بين التجارب المحصورة العدد يمثل أعداداً متتابعة واتصالاً هندسياً لا فجوات فيه . وهذا هو معنى « الاتصال » الذي تقتصر الكتب الباحثة في أسس الرياضة على ذكره بهذا الاسم فقط (Continuum) أو بوصفه بأنه « الاتصال الهندسي » Geometrical Continuity (أوحتى حدس الاتصال أوالحدس المكاني أو الهندسي .

ولم يحدث أن رياضياً قبل أواسط القرن الماضي ارتـاب في قيمة هذا الحدس الهندسي الذي تقوم علية فكرة الدالة حتى بيّن آنئذ الرياضي الفرنسي كوشي Cauchy أن هناك دوال غير متصلة بل منفصلة على عكس شهادة الحدس الهندسي مما كانت تنبو عنه آنئذ العقلية الرياضية وأسماها « الدالة المنفصلة » (Fonction Discotinue) فنشأ عن اكتشافه هذا أن تعرض الحدس الهندسي للاتصال ، أعني تعرض الاعتقاد بيداهته ، إلى الزعزعة والى عدم الثقة فيه أو الركون اليه في علم التحليل . لأن الاتصال الذي كان خاصية الدالة ولبابها أصبح الآن شيئاً غير ملازم لهابل هو عرض قد يعرض لها أحيانـاً فقط أذ بمناسبة أية دالة يحدث دائماً التساؤل : أهي متصلة أم منفصلة ؟ وهكذا افتتح كوشي بداية الطريق الى تحرير التحليل من الحدود الضيقة التي أسره فيهـا الحدس الهندسي للاتصال زمنـاً طويلاً . فلم يلبث أن فرق بعد

الفصل الخامس

تحسيب الرياضة وأكسيوماتيك العدد

(١٥) الجبر والهندسة التحليلية . (١٦) النقد الباطني في التحليل ينتهي إلى نبذ فكرة «الاتصال الهندسي» ويستعيض عنها بالأعداد. (١٧) دور الأعداد التخيلية في تحسيب الرياضة . (١٨) برنامج المذهب الحسابي ومثال رد الأعداد التخيلية الى الأعداد الصحيحة . (١٩) رد الأعداد الصماء الى الأعداد الصحيحة . (٢٠) نظرية الأعداد اللامتنهية دعم للمذهب الحسابي . (٢١) أكسيوماتيك العدد.

–(١٥)–

إن ألفاظ هذا العنوان ستتضح فيما بعد . ونبدأ الآن من القول بأن الخطوات التي تتبعناها من النقد الداخلي إلى الأكسيوماتيك الحديث في الهندسة يمكن أن نتتبع مثيلتها في علم « التحليل » (Analyse) .

لقـــد كان ديوفانت Diophante الرياضي الإسكنـــدري صاحب الكتاب المعروف باسم « ارتمطيقـــا » (Arithmetique) أي الحساب ، أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما إلى كميات أخرى معلومة . ولكنه وقف في معالجته لمثل هذه الفكرة (التي أثمرت الجبر) عند الطرق

الطوائف المنطقة Classes والعلاقات التي تقوم بينها مما سبقت الإشارة اليه (فقرة ١٢) . وهذا هو بالضبط الطريق الذي ينتظر التحليل أيضاً منذ ثورته على حدس الاتصال . ولكن طريق التحليل أطول وأشق كما سنرى .

فلنعد إلى كلمة ديرشليه : إن مغزاها هو أن علماء التحليل في مرحلة تنقية علمهم من حدس الاتصال إنما ولوا وجوههم شطر الأسس والأصول التي يقوم عليها علمهم ناقدين وفاحصين، على عكس من سبقهم من علماء التحليل الذين لم ينتبهوا إلى هذه الناحية بل اتجهوا دائماً الاتجاه الأخر والطبيعي أعني ناحية تنمية علمهم بالاكتشافات وإمداده بأنواع من الحساب جديدة لينهض بتبعاته حيال تقدم العلوم الطبيعية . وذلك الاتجاه الجديد النقدي الفاحص للأسس والمبادىء أمد الرياضة القائمة فعلاً بأفكار جديدة لأسسها على خلاف الإتجاه الآخر الذي يمدها بالمزيد من أنواع الحساب . وهذا هو مغزى عبارة ديرشليه التي سنتوسع فيما يلي في تفصيلها وفهمها .

-(١٧)-

إن الاتجاه الجديد الذي عبر عنه ديرشليه أحسن تعبير أصبح مفروضاً أومحتوماً على الرياضيين منذ امتداد فكرة الدالة الى ميدان العدد التخيلي Imaginary number أي المركب Comeplex .

لقد قيل إن كوشي Cauchy كان يستمد كل قوته الرياضية مما كان يخيف غيره من الرياضيين أعني من الأعداد التخيلية أو المركبة . والواقع أن إحدى مفاخره في الرياضة أنه وسع من أفق نظرية الدوال بأن وضع دالة أحد إحداثييها عدد تخيلي وأسماها الدالة التحليلية Fonction Analytique

لقد كان العدد التخيلي معروفاً من قبله : فقد أسماه ديكارت بهذا الاسم

كما اسماه ليبنتز بالكـــم المستحيل Quantité Impossible . ويسمى ايضاً العدد المركب لأنه يشتمل على عددين حقيقيين (Réels) . وأبسط الأعداد التخيلية هو جذر المعادلة :

$$س^٢ = - ١$$

وإلى منتصف القرن التاسع عشر كان الرياضيون ينظرون نظرة استغراب الى مثل هذا العدد الذي يشير إلى وجود كم متناقض مثل $\sqrt{-١}$ ولكـــن منذ أن أدخل كوشي علامة (٤) كرمز للعدد التخيلي $\sqrt{-١}$ (والرمز هو الحرف الأول من اسم العدد باللغة الفرنسية ، ويستبدل في اللغة العربية بالحرف الأول من اسم اللفظ المقابل له أعني بالحرف ت) إنساق كوشي بضرورة المحافظة على القواعد الجبرية الى إدخال الأعداد المركبة التي من نوع :

$$أ + ب ت$$

حيث أ و ب عددان حقيقيان اياً كانا . ثم عمد إلى استعمال مثل هذا الكم المستهجن عند الحدس كواحد من المتغيرين Variables أو الإحداثيين في الدالة فتكونت بذلك « الدالة التحليلية » التي سخر منها الرياضيون بادئ ذي بدء وتوقعوا عدم فائدتها، ولكنها ما لبثت أن أثبتت قيمتها في العلوم الطبيعية كما أمدت علم التحليل بنظرية أوضح مما لو كان قد ظل قاصراً على الأعداد الحقيقية والأعداد الصماء (Irrational) فحسب ، حتى أن رياضياً فرنسياً معاصراً درّس زمناً في جامعة القاهرة هو هادامار Hadamard يقول في مقال له في دائرة المعارف الفرنسية الجديده التي ظهرت بعض أجزائها قبيل الحرب الثانية « إن أقرب بعد بين واقعتين في العالم الحقيقي غالباً ما يمر بعـــالم العدد المركب » . ونحن دون أن نتوقـــف

اكثر من هذا عند ... عن الدوال التحليلية التي لها الآن مكانة أولى في التحليل المعاصر يمكننا أن نلمح لماذا انساق الرياضيون بالطبيعة إلى النظر في الأسس العددية أو الحسابية للتحليل بدلاً من الأسس الهندسية التي يمثلها حدس الاتصال . وكما يقول برنشفج Brvunschvicg في كتـــابه القيم « مراحل الفلسفة الرياضية » : إن القرن التاسع عشر ، ، قرن الأعداد التخيلية ، إنما جدد التحليل باستعماله لتلك الأعداد ، وذلك التجديد ليس فقط هو إضافة عنصر جديد (عنصر العدد التخيلي) وإنما هو تجديد لحق الأسس والأصول أي لحق نقطة البداية في التحليل » . والتجديد الذي لحق الأسس والأصول والذي يشير اليه برنشفج إنما هو امتداد وتعميم لفكرة العدد وإحلال للعدد محل فكرة الاتصال الهندسي كأساس يقوم عليه التحليل كله من الآن فصاعداً . وهكذا على حد تعبير مشهور للرياضي فيليكس كلاين Felix Klien وصف به حركة مماثلة في المانيا قام بها الرياضيان فيرستراس Weierstrass وكرونكر Kronecker وصارت العبارة عنوانـــاً معبراً عن تلك الحركة التي أحلت العدد محل الاتصال الهندسي في كل الكتب التي تتحدث عن تلك المرحلة في تاريخ الرياضة : « أصبح التحليل « متحسباً » (L'Analyse s'est arithmetisée) ، وتلك كلمة وضعناها عنواناً لهذا الفصل ولكنها لا تستقيم تماماً في اللغة العربية مع أنها ضرورية لكي نبقي على وحدة الاصطلاح في اللغات المختلفة ثم لكي نفهم كيف أن التحليل الذي كان معتمداً على الحدس الهندسي للاتصال تخلى عنه واستعاض عنه بالحساب العددي المعروف، يستمد منه جذروه البعيدة ويرد إلى أعداده الصحيحة (Entiérs — Integers) ودون إخلال بقواعده ذلك العـــدد التخيلي المستهجن . وواضح أن ذلك الارتداد الى الحساب كفيل بطرد كل حدس هندسي من علم التحليل وبإكسابه أيضاً وضوحاً ونقاءً ويقيناً .

يقول الفيلسوف برنشفج في كتابه « مراحل الفلسفة الرياضية » : « إن علم الرياضة باتخاذه فكرة العدد الصحيح الإيجابي أساساً له يستطيع أن يدعى بحق أنه طرد من العلم الرياضي كل غموض وشك » . تلك هي وثيقة ميلاد المذهب الحسابي (Doctrine Arithmétisante) المشهور في تاريخ الرياضة أثناء الربع الثالث من القرن الماضي والذي كانت رسالته رد التحليل الى الأعداد ، وتأسيسه على علم الحساب المعروف ، ليكتسب التحليل يقيناً مستمداً من يقين الإعداد ومبتعداً بذلك كله عن حدس الاتصال الهندسي الذي استبقاه ديكارت ثم تحطم شيئاً فشيئاً كأساس سليم وثيق للتحليل كما رأينا .

-(١٨)-

لقد تكلمت الى الآن عن نشأة التحليل وارتباطه بالهندسة حتى منتصف القرن التاسع عشر ، ثم عن حركة النقد الباطني التي بدأت في نظرية الدوال وحطمت العنصر الهندسي الكامن في أعماق التحليل متمثلاً في حدس الاتصال ، وارتدت بالرياضيين من النظر في أهداف الرياضة وتنميتها الى النظر فقط في أصولها وأسسها لتنقيتها من روابطها الهندسية ، ثم تكلمت عما تمخضت عنه هذه الحركة النقدية الباطنة من « تحسيب » التحليل أي أقامته على نظرية الأعداد وهذا هو الموضوع الذي نرى الآن أن نتوسع في فهمه بعض الشيء لأنه يتصل مباشرة بمسألة أسس الرياضة ومنهجها .

هذا الإتجاه نحو تأسيس الرياضيات على الأعداد الصحيحة المعروفة إنما ظهر ونما في فرنسا والمانيا معاً وتبعهما فيه رياضيو البلاد الأخرى . ولقد عبر عنه الرياضي الفرنسي جول تانري Jules Tannery في كتابه « نظرية الدوال ذوات المتغير الواحد » عام ١٨٨٦ بقوله : « يمكن

تكوين التحليل كله على أساس فكرة العدد الصحيح الإيجابي وفكرة جمع الأعداد الصحيحة ، وليس هناك ما يدعو الى الالتجاء ألى أية مسلمة أخرى أو الى أي مدد من التجربة [= الحدس الهندسي] . وفكرة اللامتناهي Iinfini التي يجب أن لا تظل من الآن فصاعداً سراً معمياً في الرياضة ترد الى ما يأتي : بعد كل عدد صحيح يوجد عدد صحيح آخر » ...

هكذا يرى هذا الرياضي أن التحليل أو قل الرياضة كلها إنما ترد الى مسلمات الحساب وحده وهي العدد وعملية الجمع دون حاجه الى مسلمات أخرى كأسس للتحليل، كما يثير بنوع خاص مشكلة نوع جديد من الأعداد برز بحدة في ذلك الوقت هو الأعداد اللامتناهية Iinfini فذهب للدهشة الشديدة الى أنها لم تعد لغزاً لأنها ترد الى نظرية حساب الأعداد الصحيحة نفسها.

وهكذا نرى أنه عندما يعتنق رياضي ما ذلك الاتجاه في تحسيب التحليل تنشأ عنده بالضرورة المسألة الشائكة وهي كيف يمكن للأعداد الأخرى غير الصحيحة المستعملة في التحليل كالأعداد السالبة والأعداد الصماء والأعداد التخيلية والأعداد اللامتناهية وغيرها أن ترد الى الأعداد الصحيحة الإيجابية ؟

لقد استنفدت هذه المسألة مجهودات ضخمة، وأثارت نظريات إضافية جديدة معقدة وتعريفات دقيقة للتصورات التحليلية الأساسية كالاتصال Continuum والدالة Fonction والحد Limit واللامتناهي Iufini وغيرها . وافتتح البحث في هذه المشاكل كلها في آن واحد فيرستراس في جامعة برلين وميراي Méray في جامعة ديجون بفرنسا ، وهما بطلا المذهب الحسابي وعنهما أخذ رياضيو عصرهما .

لقد كان هذان المؤلفان يجهلان المنهج الأكسيوماتيكي الذي بعثه إذ ذاك

معاصرهما مورتز باش (وقد تكلمنا عنه سابقاً بمناسبة الهندسة) فلجأ المؤلفان المذكوران الى ما سمى في ذلك الوقت بالمنهج التكويني Méthode Génétique وتبعهما في ذلك أعلام عصرهما في الرياضه أمثال ديدكند Dedekind وكرونكر Kronecker في المانيا ومولك Molk وجول تانري Tannery في فرنسا .

والمبدأ الذي يقوم عليه المنهج التكويني أو التوليدي هو كما يعرفه جول تانري على النحو الآتي « إن فكرة العدد تتكون بواسطة تعميمات متتابعة . والقضايا الخاصة بالعمليات الأربع الأساسية مطبقة على الأعداد الصحيحة تكوّن موضوع أول فصول الرياضة أي الحساب . ثم ندخل بعد ذلك الدوال التي يمكن أن ينظر اليها كزوج Couple من الأعداد الصحيحة . فنطبق على هذه الأعداد الجديدة تعريفات تلك المعادلات والخواص الأساسية التي يتعرض اليها الحساب . وفي بداية الجبر ندخل فكرة جديدة هي فكرة الأعداد النسبية Nombres Ralatifs أي الأعداد التي تسبقها دائماً علامة + وعلامة — . وهنا أيضاً نطبق على هذه الأعداد الجديدة تلك التعريفات والخواص الأساسية السالفة ... » وهكذا يستمر تانري في إدخال الأعداد المختلفة شيئاً فشيئاً كالأعداد الكسرية والصماء والدائرة والتخيلية واللامتناهية وغيرها مع الاحتفاظ ببقـــاء العمليات وتعريفاتها . ثم يختتم كلامه كما يأتي : « إن الأمر الهام هو أن تتكوّن الرياضيات شيئاً فشيئاً بحيث نتجنب في كل مراحل تكوينها على أساس العدد وحده أي التجاء الى الحدس التجريبي (Intuition empirique) وعندما ننهج هذا النهج فإن التعريفات المتتابعة للأعداد والعمليات تكون مجردة وصورية لأنه لا حدس هندسي فيها ... »

طبعاً لا يتسع المقام هنا لاستعراض كل خطوة من خطوات المذهب الحسابي في ضوء ذلك البرنامج الحافل الذي تحدث عنه جول تانري . ولكن يجب مع ذلك أن نعطي هنا على سبيل التمثيل مجرد أحساس عن كيف أنه استناداً الى الخطة التكوينة التي ذكرناها عن تانري يمكن رد الأعداد التخيلية بالذات — التي أثارت مسألة تحسيب الرياضة — الى الأعداد الصحيحة .

يقول ميراي Méray الذي له الفضل في افتتاح هذه الحركة : « إذا كانت بعض الرسوم الهندسية تمدنا لهذه المقادير التخيلية برموز مناسبة ... فانه لا ينتج عن ذلك أنه توجد علاقة ما بين تلك الرسوم والأعداد التخيلية أكثر مما توجد علاقة بين ظاهرة طبيعية ما والمنحنى الذي يمدنا بصورة بصرية ترمز اليها . وليس هناك ما يدعو الى بذل مجهود ضائع في النفاذ الى معنى الرمز $\sqrt{-١}$ الذي لا معنى له في الواقع لأن الكم السلبي لا يمكن أن يكون له جذر تربيعي » .

فالكم المرموز له بعلامة $\sqrt{-١}$ ليس، كما قلنا ، إلا تأليفاً من عددين حقيقيين (أ ، ب) مرتبين بهذا الترتيب نتفق بالاصطلاح على أن نجري عليهما القواعد المعروفة في الحساب العادي والتي تُثبت لهما خواص الاشتراك (Association) والتبادل (Commutation) والتوزيع Distribution وغير ذلك . وهنا نترك ميراي واستعراضه الرياضي البحت ونلجأ الى الفيلسوف المنطقي لويس كوتوراه Couturat الذي أعطى تخطيطاً مبسطاً لهذه النظرية في كتابه المسمى « اللامتناهي الرياضي » L'infini Mathèmatique على الوجه الآتي :

١ — نسمي عدداً تخيلياً المجموعة المكونة من عددين حقيقين مرتبين

ترتيباً معيناً . فليكن العددان الحقيقيان أ و ب فنكتب موقتاً العدد التخيلي على الصورة الآتية :

(أ ، ب)

٢ – تعريف المساواة : العددان التخيليان يتساويان عندما تكون الحدود المتناظرة متساوية . وعلى هذا فإن المعادلة (أ ، ب) = (أ١ ، ب١) إنما تعني المعادلتين :

أ = أ١ و ب = ب١

٣ – تعريف الجمع

(أ ، ب) + (أ١ ، ب١) = أ + أ١ ، ب + ب١

٤ – تعريف الطرح

(أ ، ب) – (أ١ ، ب١) = (أ – أ١ ، ب – ب١)

ونرى من هذا في نفس الوقت أنه لكي يتساوى عددان تخيليان يجب أن يكون الفرق بينهما صفراً . فإذا كان

أ – أ١ = ٠ و ب – ب١ = ٠

فإذن (أ – أ١ ، ب – ب١) = (٠ ، ٠)

٥ – نظرية

(أ ، ب) × ن = (أن ، بن)

حيث ن عدد صحيح ما .

٦ – تعريف الضرب : حاصل ضرب عددين تخيليين هو العدد الذي نحصل عليه بتأليف حدودهما وفقاً للصيغة الآتية التي هي قاعدة نسلم بها هنا تسليماً

$$(أ ، ب) \times (أ^{١} ، ب^{١}) = (أأ^{١} - بب^{١} ، أب^{١} + بأ^{١})$$

لنقف قليلاً عند هذه القاعدة السادسة الخاصة بالضرب وعند القاعدتين التاليتين (٧ و ٨) لأنها تمدنا بما يميز المقادير التخيلية :

إن حاصل ضرب عددين تخيلين لا يمكن أن يكون صفراً إلا إذا كان أحد العوامل أو كلها صفراً :

فلكي يكون لدينا

$$أأ^{١} - بب^{١} = ٠ \quad و \quad أب^{١} + بأ^{١} = ٠$$

يجب أن يكون

$$أ = ب = ٠ \quad و \quad أ^{١} = ب^{١} = ٠$$

حينئذ تكون الصيغة العامة للضرب

$$(٠ - ٠ ، ٠ + ٠)$$

٧ ـ حالة خاصة لما تقدم هي إذا كان $ب^{١} = ٠$ فإن الصيغة العامة للضرب تكون

$$(أ ، ب) \times (أ^{١} ، ٠) = (أأ^{١} ، بأ^{١})$$

وهذه النتيجة هي بعينها كما لو كان المضروب فيه عدداً حقيقياً كما في القاعدة الخامسة :

$$(أ ، ب) \times أ^{١} = (أأ^{١} ، بأ^{١})$$

وأذن فمن الطبيعي أن نعتبر العدد التخيلي الذي يكون حده الثاني صفراً هو بعينه العدد الحقيقي الذي يتكوّن منه حده الأول إذ هو يلعب نفس الدور في حالة الضرب .

أما إذا استعملنا في الصيغة (رقم ٧) السالفة $أ^{١} = ١$ مع استبقاء الصفر

كقيمة ب[١] فسنحصل على

(أ ، ب) × (١ ، ٠) = أ ، ب

وهذا يدل على أن العدد التخيلي (١ ، ٠) هو نموذج الضرب للأعداد التخيلية ويختفي كعامل من عوامل الضرب في حالة الضرب . ويمكن من هذه الجهة تشبيهه بالعدد الحقيقي + ١ في حالة الضرب المألوف .

٨ — وعلى عكس ذلك يكون العدد التخيلي (٠ ، ١) عاملاً لا يختفي في حالة الضرب ولا يمكن تجاهله لأن

(أ ، ب) × (٠ ، ١) = (— ب ، أ)

وبصفة خاصة

(٠ ، ١) × (٠ ، ١) = (— ١ ، ٠) = — ١ .

وعلى هذا فإن العدد التخيلي (٠ ، ١) مضروباً في نفسه أي ما يسمى تربيع العدد التخيلي هو عدد يساوي العدد الحقيقي — ١

وهذه هي النقطة الهامة التي نريد أن نصل اليها لنبين أن $\sqrt{-١}$ هو العدد المركب (٠ ، ١)

لنلاحظ أيضاً ملاحظة هامة وهي أن العدد التخيلي (أ ، ب) يمكن أن يعتبر حاصل جمع لعدد صورته (أ ، ٠) و (٠ ، ب) بمعنى أن يجمع بين عدد حقيقي وعدد تخيلي صرف . من جهة أخرى كل عدد تخيلي صرف يساوي لحاصل ضرب عدد حقيقي بعدد تخيلي هو (٠ ، ١)

(ب ، ٠) × (٠ ، ١) = (٠ ، ب)

يمكن إذن أن ترد كل الأعداد التخيلية الى الوحدة التخيلية (٠ ، ١) التي ترمز اليها تبسيطاً للكتابة بالحرف ت فنكتب الأعداد التخيلية كما يأتي :

أ + ب ت (وبالفرنسية a + b I)

وهو عدد ثنائي نطبق عليه كل القواعد الجبرية إذا اتفقنا على مراعاة الصيغة المشار اليها بالنجمة (*) في الفقرة الثامنة فنحصل منها على

ت × ت = ت٢ = — ١

فبفضل هذه الصيغة الأخيرة نجد أن الرمز ت يمثل الجذر التربيعي للعدد — ١ وهو العدد الذي حل محل العدد التخيلي (— ١ ، ٠) . وتأخذ (أ ، ب) عملياً الصورة أ + √— ١ ب أو أ + ب ت ولكن ما يهمنا دائماً هو أن ندرك أن العدد التخيلي أصبح على هذا النحو عدداً حقيقياً تنطبق عليه كل قواعد الجبر العادي .

ويتضح من هذا المثال أنه لكي يعمم العدد الصحيح ويمتد الى إذابة العدد التخيلي فيه يوضع الرمز (أ ، ب) الذي يتألف من عددين حقيقيين . ثم نعرّف بعد ذلك المساواة والجمع والطرح والضرب . وبعد هذا يمكن بيان أن نظريات الحساب العادي تظل مستقيمة في حساب الأعداد التخيلية . وعلى هذا النحو نفسه تمتد فكرة العدد الصحيح الى الأعداد الأخرى الكسرية والنسبية والصماء والدائرة الخ ...

—(١٩)—

من الأعداد التي يجب أن نتوقف عندها الأعداد الصماء ومشكلة ردها الى الأعداد الصحيحة . لقد اصطلح العرب على أن يضعوا في مقابل العدد الذي سموه « المطوق » وهو الذي ينتهي في جذره التربيعي ويقبل القسمه بأعداد منتهية . العدد « الأصم » الذي لا ينتهي جذره التربيعي ولا قسمته ومن ذلك أيضاً العدد الدائر .

ليس من الصعب إذن في حالة الأعداد الصماء أن ندرك لماذا اصطدم

تعميم العدد الصحيح بصعوبات جمة ناجمة عن طبيعة العدد الأصم ذاتها إذ هو عدد كما وضح لنا الآن لا يمكن تحديده أو تعريفه بعدد ينتهي من الأعداد المنطوقة بل يحتاج دائماً الى سلسلة لا تنتهي من هذه الأعداد. ولقد لفتت هذه الصعوبات أنظار الرياضيين حتى في العصر القديم فحاولوا رد الأعداد الصماء الى الأعداد الصحيحة لكي يعطي الرياضيات ما هي جديرة به من المعقولية والوضوح. فهم إذن حاولوا « تحسيب » الرياضة (Arithmetisation of Math.) أيضاً قبل ظهور هذه الحركة — التي وصفناها — في منتصف القرن الماضي.

لقد كان الفيثاغوريون أول من لاحظوا أن النسب بين بعض الأبعاد وخاصة بين الوتر وأضلع المربع نسب صماء (انظر فقرة ٦) أي لا تقاس بالأعداد الصحيحة. فذكر لنا افلاطون أن تيودور القوريناني أثبت أن $\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٦}$ الخ أعداد صماء، كما أن صديقه طيطاوس نظر في العدد الأصم بصفة عامة. وبدلاً من أن يمتد القدماء، أو يحاولوا أن يمتدوا، بالعدد المنطوق الى مجال العدد الأصم على وجه علمي أو بناء على نظرة علمية خلصوا ببساطة الى عجز علم العدد أو الحساب وفضلوا عليه علم الأبعاد أي الهندسة لكي يقيموا هذه الأخيرة على مسلمات وتعريفات. ومع ذلك فان اكتشافهم للأعداد الصماء جعلهم يفكرون منذ بداية الرياضة عند اليونان في تحسيب الرياضة على النحو التالي:

لقد ميزوا علم الحساب الذي موضوعه الأعداد الطبيعية عن اللوجستيقا (Logistique) الذي جعلوا موضوعه جداول عملية تحوي نتائج عمليات حسابية يستخدمها المساح والمهندس والفلكي وغيرهم. وفي هذه الجداول حاولوا أن يتجنبوا الأعداد الصماء وذلك بإثبات علاقات أو نسب بين

أعداد طبيعية فحسب . فهي جداول تعطى مثلاً أقرب سلسلتين من الأعداد الطبيعية لعدد أصم معين أحداهما أقرب سلسلة إليه بالنقص وأخراهما أقرب سلسلة إليه بالزيادة ، فيقع العدد الأصم بينهما . وتلك هي البذرة الأولى لفكرة تعميم العدد كما يلاحظ الرياضي برنجشهيم Pringsheim .

وفي العصر الحديث أدى كل من جبر فيت وهندسة ديكارت الى تعميم العدد أيضاً كما سبق أن رأينا من جهة أنهما مثلاً كل بعد هندسي بعدد ما ، وتعود الرياضيون على أثرهما أن يوحدوا بين العدد والبعد . وقد رسخت بالاستعمال هذه العادة في العلم الحديث بعد اكتشاف حساب التكامل والتفاضل بحيث أصبح المهندسيون أنفسهم يتأملون الأعداد مباشرة ويستنبطون من النظر فيها وحدها خصائص الأشكال الهندسية (وهي ليست أعداداً) . فمثلاً الهندسي لوجاندر Legendre يبرهن عام ١٨٢٣ القضايا الخاصة بالمماثلة أو المشابهة (Similitude) في الهندسة وذلك بالنظر في الأعداد التي تمثل أبعاداً وبتطبيق نظريات الحساب والجبر على تلك الأعداد . وكان هذا السلوك من جانب الرياضيين يتضمن في نفسه مشكلة ظلت زمناً طويلاً غير ملحوظة عندهم وهي أنهم باعتمادهم على الأعداد دائماً إنما كانوا يعتدون على « الاتصال الهندسي » ويتجاهلونه تماماً بل ويعملون على نقيض ما كان يشهد به الحدس الهندسي عندهم . والى منتصف القرن التاسع عشر توهموا أنهم إنما تغلبوا على تلك المشكلة بافتراضهم أنه ليس فقط لكل بعد عدد يقابله بل بافتراضهم أيضاً الفرض العكسي وهو أن لكل رمز عددي يحصلون عليه بتأليف اللوغارتمات الممثلة لأعداد مختلفة الأنواع (النسبية أو التخيلية أو الصماء الخ ...) يوجد بعد يقابله بالضرورة أيضاً . والرياضيون الذين تشككوا في الوضوح الهندسي

لذلك الفرض لما رأوا استحالة الإنتقال من الأعداد الى الأبعاد انتقالاً منطقياً صرفاً أو بصفة يقينية وثيقة لجأوا الى وضع مسلمة صريحة في صلب الرياضة دون برهان عليها باعتبارها مسلمة (لا نظرية) تسمى مسلمة كانتور وديدكند (Pastulat de Cantor - Dedekind) تبرر هذا الانتقال وتضع ضرورته وضعاً ، كما أنهم اجتهدوا من جهة أخرى في تقصي أنواع الأعداد وفي تكوين سلسلة منها محكمة الحلقات في تسلسلها إبتداء من الأعداد الصحيحة لكي يزيدوا علمهم التحليلي يقيناً ونقاء من الأبعاد الهندسية ، وهذا ما أدى الى التعمق في فكرة الأعداد الصماء التي نحن بصددها هنا لكي يربطوا اليها الأبعاد الهندسية بواسطة المسلمة السابقة الذكر . ذلك لأن العدد الأصم الذي لا يتناهى كالدائر مثلاً بدا لهم أنه هو الذي يمثل الأبعاد الهندسية التي يشهد بها الحدس لأن في العدد الأصم عملية لا تنتهي أي مستمرة أو متصلة وكأنها بذلك تمثل ذلك الاتصال (Continuum) المعبر عن الهندسة .

ولقد كانت نتيجة ذلك التعمق في الكشف عن طبيعة الأعداد الصماء أنهم رأوا فيها إحدى نظريتين : الأولى نظرية الحد (Limit) الذي تقف عنده السلسلة اللامتناهية لأعداد صماء (نظرية ميراي — فيرستراس — كانتور Cantor) ، والثانية نظرية القطع (Coupure أو Cut) بين مجموعتين لامتناهيتين (Deux ensembles infinis) من الأعـــداد الصماء (نظرية ديدكند — كرونكر — تانري) فأصبحت فكرتا الحد والقطع منذ ذلك الوقت الجسرين اللذين يعبر أحدهما أو الاخر كل رياضي للأنتقال من الأعداد المنطوقة أو الطبيعة الى الأعداد الصماء الممثلة للأبعاد الهندسية بالمسلمة المذكورة وبذلك رُبطت الهندسة بالأعداد نهائياً عن طريق الأعداد الصماء التي ترد بإحدى الفكرتين — الحد أو القطع — الى الأعداد المنطوقة .

ما هي نظرية الحد اولاً ؟

لقد أدخل الرياضي كوشي Cauchy قبل ذلك بسنوات فكرة « الحد » ليدل على ما يأتي : عندما تقترب القيم المتعاقبة لمتغير ما اقتراباً شديداً من قيمة ثابتة معطاة مقدماً بحيث لا تفترق عن هذه القيمة (الثابتة) إلا بأقل ما نشاء من القيم فإن هذه الاخيرة (الثابتة) تسمى الحد لكل تلك القيم. والعدد الأصم عند كوشي هو حد بهذا المعنى : فهو حد للكسور المختلفة التي تمدنا بقيم تقترب شيئاً فشيئاً من هذا الحد.

لكن ميراي Méray هو الذي جاء بالتعبير الرياضي للعدد الأصم على أساس فكرة الحد. فهو يطلق لفظ المتغير Variante على سلسلة لا متناهية من الأعداد المنطوقة $1''$ ، $2''$ ، $3''$ … n'' . فإذا كانت هذه المتوالية عند n هي أقل من عدد منطوق ما هو ع مهما يكن هذا الأخير صغيراً فإننا نقول إن ذلك المتغير « متجمع » Convegrente عند الحد ع . وللتعبير عما سبق برموز الرياضه يكتب V للدلالة على المتغير المتجمع للمتوالية $1''$ ، $2''$ ، $3''$ .. n'' بحيث أنه إبتداء من n يكون :

$$V - n'' < \text{ع}$$

هذا إذا كان للمتغير المتجمع حد.

ولكن إذا لم يكن له حد فيجب أن نضع له « حداً مثالثاً » (Limite idéale) نسميه الكم الأصم. فالعدد الاصم عند ميراي هو حد مثالي يتجمع فيه متغير ما. كما يمكن القول بأن التجمع لأي متغير إنما هو الميل نحو حد ما سواء أكان الحد حقيقياً أو مثالياً.

أما النظرية الأخرى التي تعتمد على فكرة القطع (Theory of cut) فيقول ديدكند إنه يمكن أن نقطع أو نفصل على أنحاء لا متناهية مجموعة ما

من الأعداد المنطوقه الى مجموعتين اثنتين أ و ب بحيث يكون كل عدد من المجموعة أ أقل من كل عدد من المجموعة ب ومثل هذا الفصل نسميه « قطعاً » في مجموعة الأعداد المنطوقة .

ولا يخلو هذا القطع من أحد أمرين : الأمر الأول هو أنه يوجد عدد ما سواء في أ بحيث يكون أكبر أعداد هذه المجموعة أو في ب بحيث يكون أصغر أعداد هذه المجموعة ، فنجعل عندئد القطع يقابل ذلك العدد الذي نحصل على تعريفه وتعيينه بواسطة المجموعتين أ و ب . وهذا بالطبع عدد منطوق لأننا لا نعرف بعدُ إلا هذا النوع من العدد . والأمر الثاني هو أنه لا يوجد عدد ما سواء في أ بحيث يكون أكبر أعدادها ، أو في ب بحيث يكون أصغر أعدادها ، فنتفق عندئذ على أن نضع للقطع رمزاً عددياً يقابله وفي هذه الحالة يكون الرمز معبراً عن عدد أصم . وبما أن تلك المقابلة تسمح للرموز التي نحصل عليها على ذلك الوجه بإن نقارنها فيما بينها وكذلك بأن نقارنها بالأعداد المنطوقة وبأن نجري عليها نفس العمليات التي نجريها على الأعداد المنطوقة فمن الطبيعي أن نقول بأن الرموز الجديدة تمثل أعداداً كالشأن في الأعداد المنطوقة نفسها . على كل حال يصبح العدد الأصم في هذه النظرية مجرد اصطلاح على قطع، ورمز له نجري عليه العمليات كلها .

ومهما يكن من أمر تفضيل الرياضيين لنظرية من النظريتين السابقتين على الأخرى فيما يختص بالعدد الأصم فإن الأمر الهام من وجهة نظرنا في هذه الدراسة المنصبة على أسس الرياضة هي أن« تعميم » فكرة العدد الحقيقي وامتدادها الى جميع الأعداد كالتخيلية والصماء أصبح أمراً واقعياً على أيدي رياضيي الربع الثالث من القرن الماضي . فهؤلاء

الرياضيون الذين تعرضوا لتحسيب التحليل بينوا إمكان تركيب أو تأليف الأعداد كلها ابتداء من العدد الصحيح وحده والامتداد به ، أعنى بيقينه، الى كافة الأعداد . وبما أن أحداثيات الدوال تتضمن دوماً خليطاً من تلك الأعداد فيمكن القول بأن التحليل أصبح منذ ذلك الوقت « متحسباً » (Arithmétisé) ولا يحتاج الى حدس الاتصال الهندسي .

فلنختتم كلامنا عن هـــذا المذهب الحسابي بكلمة هادامار Hadamard استاذ الرياضيه بجامعة باريس والذي درّس بجامعـة القاهرة أيضاً وهي :

« إن الرياضة اليوم بدلاً من كلمة باسكال القائلة : بأن ما تقبله الهندسة فهو مقبول عندنا في الرياضة كلها ، تحل محلها كلمة أخرى هي أن ما يقبله الحساب فهو مقبول رياضياً عندنا ... وإذا كان كل شيء في الرياضة متولد اليوم أو مستخرج من فكرة العدد الصحيح فلنحي مع بوانكاريه تحية وداع أخير فكرة الاتصال الهندسي التي كانت وحدها فيما مضى قادرة على مثل ذلك التوليد والإخراج » .

–(٢٠)–

لقـــد أضفى المذهب الحسابي على رياضيات ذلك العصر ، التي كانت مهلهلة ، تسلسلاً جميلاً وتماسكاً بديعاً جامعاً لفروعها ونظرياتها ابتداء من الأعداد الصحيحة وعملياتها التي تؤلف علم الحساب. فانتشر يقينهذه ووضوحها شيئاً فشيئاً الى جميع أنواع الأعداد والنظريات التي تتناولها الرياضة وذلك على أساس المنهج التكويني أو التوليدي الذي استخرجها جميعاً من الأعداد الصحيحة ، مستبعداً بذلك كل حدس هندسي بحيث أصبحت الهندسة نفسها

بمقتضاه نظراً في أعداد وحسب . وقد أحتاج ذلك كله الى مزيد من نظريات تتفاوت تعقيداً كالتي شرحناها .

ولكن لم يكن المذهب الحسابي الكلمة الاخيرة والوحيدة في هذا الإتجاه الذي يضفي على الأعداد الصحيحة كل هذا اليقين الرياضي . فهذا المذهب الذي استتم تكوينه في غضون الربع الثالث من القرن الماضي إنما لقي من خارجه ومن اهتمامات غريبة عنه توطيداً وتدعيماً وذلك بظهور «نظرية المجاميع» (Théorie des Ensembles أو Theory of Sets)التي جاء بها الرياضي الالماني جورج كانتور Georg Cantor ونشرها من ١٨٨٣ الى ١٨٩٥ .

وتدعيم نظرية المجاميع للمذهب الحسابي من جهتين :

الأولى أن نظرية جورج كانتور أكدت نزعة الربع الثالث من القرن الماضي في تأسيس الرياضيات كلها ومنها الهندسة على أساس الأعداد الطبيعية بحيث تشيد الرياضيات كلها على أساس علم الحساب المعروف . ذلك لأن نظرية المجاميع نظرية تعمقت الحساب نفسه وكشفت عن نظريات جديدة ومعقدة أضفت عليه قدرة عظيمة على حل الكثير من أعوص مشاكل الرياضيات العليا التي لم يكن لها حل الى ذلك الوقت .

أما الجهة الثانية فهي أن نظرية المجاميع وسعت من أفق فكرة العدد ذاته عندما أضافت الى سلسلة الأعداد الصحيحة المعروفة لدينا والتي اسمتها العدد المتناهي (Finite Number) سلاسل من الأعداد الجديدة تجيء بعد تلك السلسلة المنتهية واسمتها الأعداد العابرة أو المتجاوزة للمنتهى (Transfinite Numbers) ونكتفي بأن نسميها الأعداد اللامتناهية الكبر أو«الاعداد اللامتناهية» فحسب. ولقد سلح هذا النوع الجديد من الأعداد علم الحساب بأجنحة ضخمة جعلته يحلق بعيداً في سماء اللامتناهي الذي حير الفلاسفة والرياضيين

منذ القدم ، منذ زينون Zenon الإيلي تلميذ بارمنديس رأس المدرسة السقراطية (سقراط وافلاطون وأرسطو) حتى الربع الأخير من القرن الماضي . وهاتان الجهتان توكيد ولا ريب للمذهب الحسابي جاءه من واد بعيد عنه ومن اهتمامات مخالفة لاهتماماته ، فنظرية المجاميع دعم للمذهب الحسابي ولو من خارجه لأنها أكدت أهمية الأعداد .

ونحن دون أن نتعرض لتاريخ فكرة اللامتناهي عبر القرون نقول في اختصار أن الفارق بين تناولها طوال العصور وبين تناول جورج كانتور لها هو الفارق بين الجدل الفلسفي الذي يحلل افكاراً غامضة والمعالجة الرياضية التي تعالج أعداداً على أساس عمليات حسابية . ولم يكن من الممكن أن تنضج فكرة اللامتناهي لتصاغ في أعداد وعملياتها إلا بعد أن نضج الفكر الرياضي في القرن الماضي لتقبل الأعداد وحدها كأساس للرياضة وبعد أن نضجت فكرة الأعداد نفسها بأنواعها المختلفة عند الرياضيين . لقد أقحم زينون الإيلي في القديم فكرة اللامتناهي ليحتجّ على استحالة « الحركة » التي نادى بها هرقليطس بدلاً من السكون أو الوجود الثابت الذي نادى به أستاذه بارميندس ، وخلاصته احتجاجه أن السهم مثلاً الذي ينطلق من قوسه الى هدف ما لا يمكنه أن يفارق قوسه على حد زعمه لأن عليه أن يقطع أولاً نصف المسافة إلى الهدف وقبل ذلك نصف النصف وقبل ذلك نصف النصف النصف وهكذا يتراجع التقسيم إلى مالا نهاية ، ولا يمكن للسهم حينئذ أن يقطع ما لا ينتهي من الانقسامات ، فالحركة باطلة والوجود ساكن ثابت كما قرر أستاذه بارمنيدس .

ولقد ناقش أرسطو موقف زينون ليبين الزيف فيه فرأى أنه موقف خلط بين ما هو « بالقوة » (أو ما هو بالإمكان قابل للقسمة) وما هو قائم « بالفعل » ، فالتقسيم الذي لا ينتهي هو عملية ممكنة فقط . ولكن السهم

لا يجتاز انقسامات ممكنة وإنما يجتـــاز مسافة قائمـــة أو موجودة بالفعل بين قوسه وهدفه ولذلك فالحركة قائمة .

ولم تحظ الفكرة التي أقحمها زينون في الفكرين الفلسفي والرياضي ما هي جديرة به تماماً من عناية لصعوبتها فنجد فلاسفة العصر الحديث يتحدثون عن الله تعالى باعتباره كمالاً « لا ينتهي » كما نجد نيوتن يتحدث عن مكان وزمان غير منتهيين كل ذلك دون تناول اللامتناهي الكبر مباشرة . ولكن ربما كان بولزانو Bolzano في القرن ١٩ أول من ركز انتباهه على تمحيص هذه الفكرة تمحيصاً رياضياً عندما وضع أمام كل عدد من سلسلة الأعداد الصحيحة (١، ٢، ٣ ...) وهي لا تتوقف بالطبع عند نهاية ما ، عدداً زوجياً من سلسلة الأعداد الزوجية المتضمنة في السلسلة الأولى (٢، ٤، ٦ ...) وهي بالطبع نصف أعداد السلسلة الأولى ولا تتوقف عند نهاية كذلك مثـــل السلسلة الاولى . فاستنتج بولزانو من هاتين السلسلتين اللامتنهيتين المتقابلتين عدداً بازاء عدد ، أن خاصية العدد اللامتناهي الكبر هي أن الكل يساوي جزءه على خلاف المألوف باعتبار أن سلسلة الأعداد الزوجية هي نصف الأعداد في السلسلة الكاملة .

إن خصائص العدد اللامتناهي التي منها تلك الخاصية التي أشار اليها بولزانو إنما أصبحت واضحة في نطاق المعالجة الرياضية التامة للأعداد اللامتناهية عند جورج كانتور في الربع الأخير من القرن الماضي . ونحن لكي نكوّن فكرة مبدئية عن هذه النظرية الجريئة التي اقتحمت أمنع الحصون الرياضية وأعني حصون العدد اللامتناهي الكبر ، والتي تعتبر بحق أبعد الاكتشافات الرياضية وأعجبها والتي أثارت منذ ظهورها وتثير إلى الآن الأبحاث والنقاش وقسمت الرياضيين الى معسكرين متنابذين . نقول لكي نكوّن عنها فكرة

امبدئية نكتفي بالإشارة إليها من خارجها فنقول إنها نظرية قسّمت الأعداد لى أعداد عادة أو أساسية Cardinal Numbers والى أعداد مرتبة Ordinal Numbers . ولكل قسم نظرياته وخصائصه المميزة والمخالفة . ثم قسمت بعد ذلك الأعداد الى متناهية .Finite N والى لا متناهية .Transfinite N فدرست في كل من هذين القسمين أعداده العاده وأعداد المرتبة ، فتنوعت النظريات في كل منهما كما تكشفت فروق شاسعة بين نوعي العدد المتناهي واللامتناهي حتى في معنى أو قيمة العمليات الحسابية نفسها كالجمع والضرب والقسمة والجذور والقوى والدالة والحد الخ ...

ولكي نتبين مغزى أو معنى هذا التنوع والاختلاف بين نوعي العدد فيما يتصل ببعض العمليات الحسابية المعروفة لدى الجميع والتي ذكرنا الآن اسماء بعضها نقول إن كانتور يرمز بحرف الألف العبري لاصغر الأعداد اللامتناهية العادة وسنكتب بدلاً عنه حرف أ . بينما يرمز بحرف W اليوناني لأصغر الأعداد اللامتناهية المرتبة .

إن أصغر الأعداد اللامتناهية العادة المرموز لهبحرف أ عدد يحصر جميع الأعداد المتناهيه . بعبارة أخرى إذا اعتبرنا أن كل الأعداد المتناهيه تؤلف « مجموعة » (Set, Ensemble) وهذه المجموعة لا يمكن بالطبع حصر أفرادها بالإستقراء لأنه مهما وصلنا الى عدد صحيح فإنه يوجد بعده عدد آخر ، فإن هذه المجموعة لكل الأعداد الصحيحة التي نرمز اليها بحرف أ هي أول أعداد اللامتناهي وأصغرها جميعاً .

لننظر الآن في تطبيق بعض العمليات الحسابية المألوفة على هذا اللامتناهي العاد الأصغر لنتبين عدم جدوى هذه العمليات المألوفة لدينا في هذا الميدان الجديد ميدان اللامتناهي :

أ + أ = أ

أ + ن = أ

أ + أ = أ

أ × ن = أ

أ × أ = أ

أن = أ

الخ ...

هذه نظرة عابرة من الخارج الى نظرية المجاميع بالقدر الذي نفهم به عدم فاعلية العمليات الحسابية المألوفه في مجال الأعداد اللامتناهية والتي تبين خاصية من خواص اللامتناهي سبق أن تنبه اليها بولزانو وهي أن الكل يساوي جزءه وهذا واضح من المعادلات السابقة. هذا بالإضافة الى أن ما ذكرناه عن هذه النظرية يكفي لكي نفهم بعض ما أثارته من ضجيج بين الرياضيين عند تعمقهم هذه النظرية في كل فروعها واكتشافهم لنقائض Paradoxes فيها حتى الجدال حولها ، وأسالت ولا تزال تسيل المداد وحركت أقلام الرياضيين والفلاسفة المنطقيين الى الآن لتقويم ما أعوج من النظرية . وكل هذا يقودنا إلى صميم المسألة الأساسية التي نتتبعها دائما هنا وهي مناهج الرياضة وأسسها.

ففيما يختص بالنقائض التي تتضمنها النظرية نذكر على سبيل المثال التناقض الذي تنبه اليه الرياضي الايطالي بيورالي فورتي Burali Forti وهو أول تناقض ظهر في النظرية وكان ذلك عام ١٨٩٧ .

فالنظرية التاسعة والأربعون في الأعداد المرتبة اللامتناهية عند كانتور تقول : إن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيباً تصاعدياً بحيث

أنه من بين كل عددين منهما أياً كانا يوجد دائماً عدد أقل من الآخر وأن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد.

فيقول بيورالي فورتي إذا أخذنا هذا العدد الأخير كطرف وحيد في المقارنة فلا بد أن يكون وفقاً للنظرية نفسها — باعتباره عدداً مرتباً لا متناهياً — أقل من عدد آخر لا نعلمه، وأذن فأكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية، وهذا تناقض في هذه النظرية ٤٩

مثال آخر للتناقض مـا كشفه برتراند راسل Bertrand Russell الفيلسوف المنطقي المعاصر في نظرية من نظريات كانتور في العدد العاد المتناهي التي تقول أن كل عدد منته باعتباره مجموعة (Set أو Class) لا يشتمل على ذاته كجزء منها. فيقول راسل إنه يمكن بيان أن عدد الأعداد المتناهية كلها (أي مجموعة كـل المجاميع العددية) هو في آن واحد لا يشتمل ذاته ويشتمل ذاته أيضاً كجزء من ذاته، وهذا تناقض. فهو لا يشتمل ذاته لأنه أكبرها وفقاً للنظرية. ولكنه أيضاً يشتمل على ذاته باعتباره مجموعة كغيره من المجاميع أي أحدى المجاميع التي لا تشتمل على ذاتها. لتقريب هذا التناقض نقول: إذا جمعنا كل فهارس مكتبات العالم في هذه الحجرة بحيث لا يبقى فهرس خارجها، فنحن لدينا جميع الفهارس (أي كل المجاميع Sets) للمكتبات. الآن نضع فهرساً لكل الفهارس الموجودة بالحجرة، فهذا هو المجموعة لكل المجاميع. هذا الفهرس الكلي هو في آن واحد فهرس لكل الفهارس وأيضاً واحد من تلك الفهارس باعتباره فهرساً. بعبارة أخرى هو في آن واحد لا يشتمل على ذاته كجزء لذاته وأيضاً يشتمل على ذاته كأحد الفهارس، وهذا تناقض.

إلى آخر ما هنالك من نقائض أخرى تنبه اليها الرياضيون. وواضح أنه

يترتب على تلك النقائض وجود خلل مـــا في نظريات أو قضايا نظرية المجاميع ، يجب إما إصلاحه وإما رفض النظرية الكانتوريه برمتها إذا استعصى الإصلاح . وسواء أكان الموقف اللاحق إصلاحـــاً أو رفضاً لهذه النظرية "فإن الأمر الثابت الأكيد أن المذهب الحسابي قد ظفر من هذه النظرية بتأييدها له بطريق غير مباشر بأن الأعداد الطبيعية هي حجر الزاوية في تأسيس الرياضيات بما فيها الهندسة عند التحليليين .

– (٢١) –

تتبعنا الى الآن خطوات تحسيب الرياضة والابتعاد بها نهائياً عن حدس الاتصال الهندسي ، ونوهنا بما لنظرية جورج كانتور من فضل في ترسيخ ألفة الرياضيين للأعداد دون الأشكال الهندسية رغم ما ظهر من نقائض في هذه النظرية .

وواضح أن الأبحاث في أسس الرياضة لم تتوقف عند الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي القائل بأن الأعداد الطبيعية أو الصحيحة هي كل شيء في الرياضة واليها يرد كل شيء آخر فيها .

ففي السنوات الأخيرة من القرن الماضي تشعبت الأبحاث في أسس الرياضة عند الرياضيين الى تيارين ، فأما أحدهما فقد ظل مغمضاً عينيه عن نظرية جورج كانتور وبدأ من الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي وهي أن الأعداد الصحيحة هي أساس كل شيء في الرياضة فلم يشأ هذا التيار أن يتوقف عند هذه الأعداد كنقطة بدء يقينية للرياضة وإنما حاول أن يقـــيم اليقين الرياضي كله على أساس المنهج المعبد في الرياضه منذ القدم ألا وهو المنهج الأكسيوماتيكي ، فبحث عن مسلمات لسلسلة الأعداد تستمد السلسلة يقينها منها ومن ورائها أيضاً الرياضيات بحذافيرها كما رتبها المذهب

الحسابي . وبالطبع في مثل هذا البحث الذي أصبحت المسألة الملحة فيه هي مسألة يقين منطقي يصبح للمنطق الصوري دور هام في تكوين المسلمات كما لمسنا هذا عند كلامنا عن مسلمات الهندسات .

أما التيار الرياضي الآخر فقد بدأ من نقائض نظرية جورج كانتور وحاول علاجها أو على الأصح حـــاول تقويم النظرية نفسها بالطرق الاكسيوماتيكية أيضاً واستعان كذلك بالمنطق الصوري ، وأن كان هذا التيار جزئياً وموضعياً في داخل نظرية المجاميع نفسها ومن أجل تقويم النظرية وحدها .

وهكذا وجدت الرياضة نفسها مسوقة بالضرورة عند التماس أساس لليقين إلى الاستعانة بالمنطق الصوري الذي أصبح له منذ ذاك الوقت دور هام في كل الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة .

لقد كان هذا الإنشعاب الى التيارين المذكورين كما قلت بين الرياضيين منذ أواخر القرن الماضي وقد استمر في القرن العشرين .

ولكن ما أن بزغ القرن العشرون حتّى التقى التياران المذكوران في نزعة ثالثة ومخالفة عند بعض الفلاسفة ذوي العقلية الرياضية هم أصحاب التيار اللوجستيقي أو المنطقي الصرف والذي يؤسس الرياضة على المنطق الصوري وحده ، وأشير هنا الى برتراند راسل وهويتهد والآخذين عنهما .

ولقد أحدث هذا التيار المنطقي رد فعل عنيف عند إمام الرياضيين المحدثين في فترة ما بين الحربين وهو ديفيد هلبرت أستاذ الرياضة بجامعة برلين (توفي عام ١٩٣٧) فحاول في تيار رابع أن يستقل بالرياضة عن المنطق كما حاول ألا يعود الى أساس كحدس الاتصال الذي فارقته الرياضة منذ فترة طويلة فلجأ الى الطريقة الاكسيوماتيكية وجاء باكسيومايتك جديد لا الى المنطق ولا الى الرياضة ، أعني بمعالجة لرموز لا تنتسب الى أي من العلمين

المذكورين وحاول أن يشتق منه المنطق والرياضة سوياً .

ثم ما لبث أن ظهر على المسرح طلائع الرياضيين المعاصرين الذين لم يرضوا عن هذين الأساسين المنطقي (التيار الثالث) والأكسيوماتيكي (التياران الثاني والرابع) فحاولوا الرجوع بالرياضيات الى الوراء ، الى ما قبل المذهب الحسابي ، فالتمسوا أساساً للرياضيات فيما سبق للرياضيات الحديثة أن تخلت عنه وهو « الحدس الرياضي » كأساس ومنبع أصيل ودائم لها ، وبذلك عادوا الى التقاليد القديمة في الرياضيات .

فهذه خمسة تيارات أو مذاهب يجب الإشارة اليها لكي نستكمل الصورة التي نكونها عن مسألة أسس الرياضة في الوقت الحاضر . ولكننا نختتم هنا بالكلام عن التيار الأول وحده لأنه مكمل للمذهب الحسابي ولاننا في هذا الفصل بالذات أردنا بيان مسألة «تحسيب الرياضة وأكسيوماتيك الحساب ». فالى هذا الأكسيوماتيك نوجه الآن الأنتباه :

إذا كانت الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي هي أن الرياضة إنما ترد بحذافيرها الى العدد الصحيح فلا غرابة في أننا نجد رياضيي ذلك العصر لا يقبلون كعنصر حقيقي في الرياضة كلها إلا الأعداد الصحيحة . وهكذا وقف رياضيو ذلك العصر أمام الأعداد موقف الأكبار والتقديس باعتبارها اليقين كله . وهذا ما جعل رياضيا كبيراً مثل كرونكر يقول في عبارة مشهورة : « الأعداد الصحيحة تأتينا من عند الله وكل ما عداها فهو من تأليف الإنسان » .

ولكن الرياضيين الذين حرصوا على تأسيس علمهم على أسس وثيقة بعيدة عن الحدس لم يقتنعوا بنتيجة ثيولوجية كالتي انتهى اليها كرونكر . حقيقة إن مبدأ ضرورة تحسيب التحليل قد أسبغ على العدد الصحيح قيمة مطلقة

ووجوداً أولياً وموضوعياً أكثر مما أعطى للرموز الرياضية الأخرى التي يتناولها الرياضيون. ولكن ألا يمكن للرياضيات أن تكون مرة أخرى فريسة حدس جديد يجعلنا نثق ببداهة الأعداد الصحيحة ونستمد يقين الرياضة من مثـــل هذه البداهة الحدسية؟ ثم ألا يمكن النظر الى العدد الصحيح نفسه على أنه غير بديهي الى هذا الحد وأنه قد يقبل تحليلاً آخر يقودنا هذه المرة الى أبعد من حدود المذهب الحسابي والرياضة بحذافيرها ويمكننا من تأسيس الرياضة كلها على أسس أوثق؟ هذا هو المبدأ الذي يبدو أنه سيطر على كل الابحاث الخاصة بأسس الرياضة عند الرياضيين والفلاسفـة على السواء، منذ أواخر القرن الماضي وبخاصة فيما يتعلق بأكسيوماتيك الحساب.

فمن الواضح أن تأسيس فكرة الأعداد على أسس أكسيوماتيكية إنما يكسب هذه الفكرة عند اولئك الرياضيين الذين يلجأون الى هذا المنهج الذي عرفته الرياضة منذ القدم كأوثق منهج لها، إنما يكسبها دقة ووضوحاً ويقيناً أوفى، ينتشر من المسلمات عبر الأعداد الصحيحة الى كل أجزاء الرياضة الأخرى باعتبارها قد ارتدت في المذهب الحسابي نفسه الى الأعداد الصحيحة.

هكذا نرى بيانو Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو يحاول اقتفاء طريقة مورتز باش Moritz Pasch أبي الأكسيوماتيك الحديث فيعطينا أهم اكسيوماتيك للعدد الى الآن: فيختار حدوداً أولية ثلاثة هي: الصفر — العدد — التالي Succeseur، وخمس مسلمات هي بمثابـــة العلاقات المنطقية التي تبين استعمال تلك الحدود. ومن ثم الأكسيوماتيك الآتي لنظرية الأعداد:

١ ـ الصفر عدد .

٢ ـ التالي لعدد عدد .

٣ ـ ليس لعددين ما نفس التالي .

٤ ـ ليس الصفر تالياً لأي عدد .

٥ ـ كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه باعتباره عدداً فهي تصدق على العدد التالي له ، كما تصدق على التالي لما يليه وهكذا .

لنلاحظ أن هذه المسلمة الأخيرة هي التي تتضمن اطراد العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب مثلاً . وقد سمي هنري بوانكاريه هذه الخاصية « الاستقراء الرياضي » Induction Mathematique أو الإستقراء بالتكرار Induction Par reccurence كما أسماها برتراند راسل الخاصية الوراثية (Propriété Hereditaire) للأعداد أي أن ما يصدق على عدد ينتقل بالوراثة الى غيره .

على كل حال أصبح أكسيوماتيك بيانو كلاسيكياً عند الرياضيين وغيرهم بحيث يدعيه لأنفسهم كثيرون من أمثال ديدكند مثلاً ، كما نجده مذكوراً في كل الأبحاث التي تتحدث عن أكسيوماتيك العدد . وقد قدم لهذا الأكسيوماتيك في مصنفات بيانو تحليل منطقي بالطرق الرمزية (Symbolic) التي أدخلها جبر المنطق في القرن الماضي لقضايا الرياضة بحيث تتحول الى قضايا منطقية صرفة . وكان هذا كله بالطبع نقطة البداية لقيام اللوجستيقا (المنطق الرياضي) Logistique عند راسل في القرن العشرين .

على أن أكسيوماتيك بيانو لم يكن الأكسيوماتيك الوحيد للعدد إذ يمكن أن نحصي ما لا يقل عن أثنى عشر أكسيوماتيك آخر للعدد عند رياضيين ومناطقة من أمثال لاندو Landeau وهلبرت وبادوا Padoa وهنتجتون Hantigton وكونج Konig وغيرهم .

ولا يغيب عن البال أن المذهب الحسابي بانتهائه الى « أكسيوماتيك العدد » إنما يكون قد أينع ثمرته الأخيرة وأدى رسالته المنتظرة وهي أن الرياضة بابتعادها نهائياً عن الحدس المكاني إنما تصبح علماً مجرداً وصورياً يقوم على طائفة من الحدود والمسلمات الاولية التي ترد اليها سلسلة الأعداد الصحيحة ثم ما يليها من الأعداد كما رتبها المذهب الحسابي .

هذا فيما يختص بأكسيوماتيك العدد الذي ختمنا بنظير له في الفصل السابق عن الهندسة عندما تكلمنا عن الأكسيوماتيك فيها . وكان ينبغي الوقوف عند هذا الحد كما يتضح من إشارتنا في عنوان هذا الفصل لولا أنه لابد من كلمة أخيرة عن التيار الثاني الخاص باكسيوماتيك نظرية كانتور . هو تيار موضعي أي خاص بهذه النظرية وحدها . وقد تزعم زرميلو Zermelo حركة تقويم ما اعوج من نظرية المجاميع وذلك بتأسيسها على مسلمات ، وتبعه في هذه المحاولة الاكسيوماتيكية الكثيرون من أعلام الرياضيات المعاصرة أمثال هاوسدورف Felix Hausdorff وكونج Konig وهاينكل Haenkel وغيرهم . وقد حاول هذا التيار تحاشي النقائض التي ذكرنا نموذجاً لها وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات تنتجها دون تناقض بين قضاياها . فاستخرج زرميلو مثلاً المسلمات المتضمنة لها عند كانتور وأضاف اليها مسلمتين : تسمى أحداها مسلمة الأنتقاء Axiome de selection وتسمى الأخرى مسلمة الرد أو الارجاع (Axiome de Reductibilité) . ومع ذلك لم تسلم المسلمات من نقد الرياضيين كما أنها لم تستطع أن تتجنب النقائض تماماً .

أما التيارات الثلاثة الأخرى فسنفرد لها مكاناً أوسع فيما يلي وسنهتم بصفة خاصة بالتيار اللوجستيقي لصلته الواضحة بالفلسفة ولأنه قطب الرحى بالنسبة للتيارين اللاحقين اللذين يعتبران ردود فعل عليه .

الفصل السادس

المذاهب المعاصرة في أسس الرياضة

(٢٢) معنى المذهب اللوجستيقي. (٢٣) معالم تاريخ المنطق الرياضي.
(٢٤) عرض لحساب القضايا الاولية في اللوجستيقا . (٢٥) اشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق . (٢٦) المذهب الأكسيوماتيكي . (٢٧) المذهب الحدسي والمذهب الحدسي الجديد .

– (٢٢) –

أشرنا في ختام الفصل السابق الى أن مسرح الأبحاث المعاصرة في أسس الرياضة تتنازعه منذ بداية القرن العشرين ثلاثة تيارات هامة يأتي المذهب اللوجستيقي في مقدمتها لأنه أسبقها تاريخاً في ظهوره فوق هذا المسرح، ثم لأن الخلاف حوله هو الذي حدد ظهور المذهبين الآخرين كردود فعل عليه من قبل الرياضيين وهما المذهب الأكسيوماتيكي بزعامة ديفيد هلبرت والمذهب الحدسي الجديد بزعامة بروور (Brouwer) .

نريد الآن أن نوجه الانتباه الى المذهب اللوجستيقي وحده . أنه مذهب اتخذ له أحياناً عند صاحبه برتراند راسل اسم « الفلسفة العلمية » (Scientific Philos.) وهو اصطلاح له ما يبرره : فإن نجاح منهج العلم

جعل بعض الفلاسفة يحلمون بفلسفة علمية (دون أن يطلقوا هذا الاسم) ، أعني يحلمون بفلسفة يمكنها إذا اصطنعت لنفسها منهج العلم أن تصل الى مثل ما وصلت اليه العلوم المتقدمة من يقين ومن نتائج ثابتة تنمو مع الأيام. ومنذ فجر الفلسفة الحديثة حينما كانت الرياضيات أسبق العلوم نضجاً نرى ديكارت أبو الفلسفة الحديثة يكرس المنهج الرياضي ويتخذه منهجاً لفلسفته وللوصول الى اليقين حتّى في الطبيعيات. وعلى العكس من ذلك حينما نضجت الطبيعيات للاستقلال عن أمها الفلسفة عند نيوتن نرى فلاسفة متأثرين به من أمثال لوك وهيوم يدعون الى منهج التجربة ويلجأون الى التجربة الحسية وما يستمد منها من معان وأفكار لاقامة حقائق الفلسفة. هناك إذن دائماً محاولات متجددة لاقامة فلسفة علمية ، بمعنى فلسفة تستند الى منهج أحد هذين العلمين المتقدمين في الطليعة بالنسبة الى العلوم كلها وهما الرياضيات والطبيعيات.

والمذهب اللوجستيقي فلسفة علمية بهذا المعنى ، لأنه حين أراد أن يسهم في الحركة الفكرية المعاصرة حول أسس الرياضيات اصطنع لنفسه أولاً وقبل كل شيء آلة رياضية دقيقة لتحليل المسائل المعروضة عليه هي المنطق الرياضي (المسمى ايضاً لوجستيقا) وهو المنطق الذي تسلح بسلاح الرياضة نفسها ، أعني تسلح بأدق الرموز وبالعمليات الحسابية المختلفة مبتعداً بذلك عن استعمال اللغة والاقيسية اللغوية على غرار أخته الرياضة ، حتى أصبح قادراً تماماً على التعبير عن قضايا الرياضة نفسها بلغة المنطق وحده وعلى تحليل أسسها التي انتهت اليها في المذهب الحسابي وردها برمتها الى حدود المنطق وقضاياه الصرفة ، فأثبت بذلك المذهب اللوجستيقي نظريته الأساسية بطريقة علمية بحتة لا أثر للفلسفة فيها وهي أن الرياضيات الخالصة Pure Mathematics ليست إلا فرعاً من المنطق الصوري ولا شيء

فيهـــا غير صور المنطق وحده أي ثوابتـــه Constants . وإذا صدق هذا الرأي فان التمييز التقليدي بين العلمين ـ الرياضة والمنطق ـ ولو أنه قائم ووطيد إلا أنه تمييز معتسف ومصطنع.

هذه هي الفلسفة العلمية التي دعا اليها منذ أوائل هذا القرن الفيلسوف الأنجليزي برتراند راسل في كتابه مبادىء الرياضيات Princples of Mathematics (١٩٠٣) ثم في كتابه الثاني بالاشتراك مع هويتهد بنفس العنوان مكتوباً باللاتينية Principia Mathematica الذي ظهر في ثلاثة أجزاء (من ١٩١١ الى ١٩١٣) . وتسمى تلك الفلسفة أيضاً (لا عند صاحبها وإنما عند المؤلفين الآخرين من الرياضيين والفلاسفة الذين يتعرضون اليوم للكتابة في موضوع أسس الرياضيات) بالمذهب اللوجستيقي أو النظرية اللوجستيقية (Logistic Theory) في أسس الرياضة ، وذلك ليس بالنظر الى أن هذه العبارة تتضمن الأشارة الى المنطق في صورته الرياضية الجديدة فهذا كان يكفي فيه أن يسمى المنطق الرمزي Symbolic logic او المنطق الرياضي Mathematical logic كما اصطلح راسل نفسه ، ولكن سميت بالنظرية اللوجستيقية إشارة الى شيء أبعد من مجرد المنطق . أعني الى تلك النظرية الأخرى الجريئة القائلة بأن الرياضيات الخالصة ليس فيها شيء غير عناصر المنطق الصوري وحده ، وأنها تشتق منه كفرع له في نسق علمي واحد ، وكذلك أيضاً إشارة الى أن حل نقائض الرياضة المعاصرة التي سبق أن نوهنا عنها إحتاجت الى قيام نظرية أخرى لهذا الغرض وحده سماها راسل نظرية الأنماط Theory of Types ، أدخلها في ذلك النسق الموحد كطريقة لحل النقائص الرياضية ولم تعرف نظرية الأنماط هذه إلا في هذا النسق وحده ، وهذان الوجهان للمذهب اللوجستيقي : رد الرياضة بحذافيرها الى المنطق الصوري ثم حل نقائض الرياضة بإقامة نظرية كالأنماط ليسا من المنطق

في شيء ولا يمتان بصلة الى المنطق في ذاته من حيث هو كذلك إذ هما غرضان زائدان عن حاجة المنطق ويمكن للمنطق أن يقوم بدونهما ، ولا يخصان إلا هذه الفلسفة العلمية المعينة التي عرفت « بالنظرية اللوجستيقية » في كل المؤلفات المعاصرة ، ولذلك يجب استبقاء هذه التسمية للدلالة على هذه النظرية . ومع ذلك فإن النظرية اللوجستيقية هذه ليست جديدة كل الجدة ولم تنبع كاملة بحذافيراها من رأس برتراند راسل كما نبعت بالاس أثنيه من رأس زيوس في أساطير اليونان[٢]، فقد سبقتها محاولات جادة في هذا الإتجاه . ولذلك يستحسن أن نقسم خطوات عرضنا لهذه النظرية على الوجه الآتي :

الخطوة الاولى نخصصها للمحة تاريخية في معالم الطريق الذي انتقل فيه المنطق الصوري من علم لغوي نقيس فيه بالالفاظ الى علم رياضي نحسب فيه الاستنباطات كما نحسب في الرياضة .

والخطوة الثانية إشارة الى أنواع الحساب المنطقي مع تخطيط لهيكل الحساب الأول منها الذي يستند إليه البنيان اللوجستيقي كله .

والخطوة الثالثة بيان طريقة اشتقاق الرياضة البحتة من المنطق الصوري وهو الموضوع الأساسي في فلسفة الرياضة من وجهة نظر هذا المذهب في بحثنا هذا ، مع مناقشة أيضاً لبعض نقط هذا الموضوع .

وبهذا نستكمل الصورة التي يمكن أن تعرض فيها هذه النظرية .

— (٢٣) —

لفظ « لوجستيقا » (Logistica) معروف عند القدماء للدلالة على جداول يجد فيها الحاسبون نتائج العمليات الحسابية جاهزة دون تكبد

اجرائها وتذكرنا بجداول اللوغارتمات اليوم . ثم اطلق استعمال اللفظ منذ مؤتمر الفلسفة الدولي المنعقد في جنيف عام ١٩٠٤ للدلالة على المنطق المعاصر في صورته الرياضية . كما يطلق عليه أيضاً « المنطق الرياضي » (Mathematical logic و« المنطق الرمزي » (Symbolic logic) . وتوجد مجلة يصدرها تحت هذا الأسم الأخير اتحاد المناطقة منذ ١٩٣٧ بنجاح كبير في امريكا (Journal of symbolic logic) .

أما عند مؤلفي القرن التاسع عشر الذين لهم الفضل في إيقاظ المنطق من سباته الطويل وإرسائه على قواعد حسابية (Calculus) فقد كان الاسم الشائع له هو جبر المنطق (Algebra of logic) .

وفي مجال هذا الجبر سبقت محاولات جادة أيضاً عند الفيلسوف والرياضي ليبنتز (Leibniz) في القرن السابع عشر وكانت كتاباته المختلفة في هذا الموضوع محاولات فيما كان يحلم به من تأسيس علم أعم من الرياضيات ، فيه يتحول الاستنباط الى حساب ، سماه حيناً الرياضة العامة Mathematique Universelle وحيناً آخر الابجدية العامه Caracteristique Universelle . فهو أول من نظر الى المنطق كأساس ترد اليه كل معرفة تريد أن تكون يقينيه ومنها الرياضيات بالطبع . ولذلك ليس غريباً أن نجد اللوجستيقيين في بداية أمرهم يؤلفون في منطق لايبنتز وينشرون آراءه المؤيدة لموقفهم . فبراتراند راسل ولويس كوتوراه وتلاميذ بيانو أهتموا جميعاً بدراسته وبالتنقيب عن مخطوطاته المنطقية المحفوظة في مكتبة هانوفرحيث عاش ، ويعتبر بحق عند اللوجستيقيين الأب الحقيقي للوجستيقا أكثر مما يعتبر جبر يوالمنطق في القرن التاسع عشر ذلك لأن ليبنتز أهتم برد قضايا المعرفة وعلى رأسها القضايا الرياضية إلى المنطق الصوري وهذه هي النظرية المشتركة بينه وبينهم . ثم إنه بين أنه لا يمكن برهان تلك

النظرية إلاّ إذا توافر مقدماً أمران : أداة رمزية وثيقة وحساب منطقي . أما فيما يختص بإدخال الرمز إلى ميدان المنطق فقد كفلت ذلك عبقريته الرمزية في الرياضة التي كانت مثلاً يحتذى عند الرياضيين وعاملاً من عوامل تقدم الرياضيات وانتشارها في اوروبا كلها وتدين له الرياضيات بالكثير من رموزها . وفيما يختص بالحساب المنطقي فقد عالج معالجات رياضية طائفة من العلاقات التي لا تعنى بها الرياضة والتي هي من صميم المنطق مثل علاقات الذاتية (Identié) والتضمن أو الاحتواء (Inclusin) والمساواة واللامساواة وأكبر من ، وأصغر من ، والفصل ، والوصل ، وغير ذلك مما يجدد المنطق كحساب رياضي للاستنباطات . فتناول كل علاقة من هذه العلاقات في حساب منفصل . ويعلق لويس كوتوراه في كتابه القيم عن منطق ليبنتز (La logique de Leibniz) بأن النتائج التي توصل إليها هذا الفيلسوف الرياضي قبل قرنين من ظهور جورج بول تشهد بأنه كان أكثر تفوقاً وتقدماً بالقياس إلى ما وصل اليه جورج بول Boole مؤسس جبر المنطق في القرن التاسع عشر الذي قدم للوجستيقا .

لم تترك أبحاث ليبنتز في جبر المنطق أثراً على المناطقة اللاحقين وظلت أبحاثه المخطوطة حبيسة مكتبة هانوفر حتى اكتشفها اللوجستيقيون منذ أواخر القرن الماضي ، لذلك نجد أن مواطنه الفيلسوف الكبير ايمانويل كانط الذي كتب بعده بنحو قرن تقريباً لم يفطن الى أمكان تطور المنطق إلى حساب إذ كان يجهل تماماً أبحاث سلفه ليبنتز المبتكرة التي نقلت المنطق خطوة أكيدة وكبيرة الى الأمام ، فقرر في نظرية غريبة له في مقدمة الطبعة الثانية من كتاب (نقد العقل الخالص) أن المنطق دخل الطريق العلمي الأكيد وولد كاملاً منذ أرسطو لأنه لم يحتج أن يتقهقر الى الوراء ليراجع أخطاءه ويصححها كما أنه لم يأت فيه مؤلف بجديد منذ ولادته . وما سر ولادته كاملاً على هذا النحو من أول خطوة له إلا بساطة موضوعه كما يقول حيث لا ينظر العقل

إلا في صور تفكيره وحسب .

ولكن سرعان ما تبددت نظرية اكتمال المنطق هذه وأصبح المنطق الذي اعتبره كانط منتهياً مقفلاً على نفسه منذ أرسطو أكثر العلوم حركة وتجدداً منذ ظهور كتاب جورج بول وعنوانه An Investigation into the laws of Thought في عام ١٨٥٤ الذي وضع فيه بول أساس نظرية « جبر المنطق » ثم أصبح بعده البحث في هذه النظرية حركة عالمية اشترك فيها مؤلفون في أنجلترا من أمثال جيفنز Jevons وفن Venn وفي المانيا مثل شرويدر Sehroder وفي أمريكا مثل شارلساندرس بيرس Peirce وفي فرنسا مثل لويس كوتوراه وفي إيطاليا مثل بيانو Peano وتلاميذه الكثيرون . ولا يزال المرجعان الأساسيان في هـــذه النظرية : المؤلف الضخم لشرويدر وعنوانه Algebra der logik (من ١٨٩٠ إلى ١٩٠٥) والكتاب الموجز القيم للويس كوتوراه وعنوانه Algèbre de la logique (١٩٠٥) وبهذين المؤلفين توقفت الأبحاث في هـــذه النظرية بعد أن ظهر على المسرح المنطق الرياضي المعاصر (اللوجستيقا) عند راسل لأن جبر المنطق هذا اتضح أنـــه فصل من فصول المنطق الرياضي يقابل حساب « الفئات » (Calculus of Classes) وبذلك أصبح جزءاً من نظرية أوسع .

في جبر المنطق الذي أعاد اكتشافه في القرن الماضي جورج بول دون أن يعلم شيئاً أطلاقاً عن كتابات ليبنتز تتغير بعض العمليات الحسابية عن مثيلتها في الجبر المألوف وخاصة عمليات الجمع والضرب وهذا التغير بالاضافة الى القوانين المترتبة على تلك التغيرات أهم ظاهرة في هذا الجبر .

إلا أن هذا التغير أو قل هذا الإنحراف عن المألوف في الجبر العادي لم يعد أمراً غريباً في رياضيات ذلك العصر . فإن المبدأ الذي كان يعتنقه الرياضيون

الى منتصف القرن الماضي الخاص بضرورة اطراد العمليات الرياضية اطراداً لا يتخلف في كل نظريات الرياضة أصبح مبدأ كان لا بد لهم من التخلي عنه لكي تسير الرياضيات قدماً إلى الأمام كما تخلت الهندسة من قبل – وقد رأينا هذا – عن مبدأ بقاء المسلمات في الهندسة على حالها عندما أدخل الهندسيون تغييرات فيها أدت الى هندسات أخرى لم تكن متوقعة. مثل الهندسات غير الأقليدية. ولم يكن جبر المنطق وحده هو الذي انحرف من معاني عمليات الجبر المألوف، فلقد نشأت في ذلك العصر نظريات جبرية أخرى تختلف عن الجبر المعتاد في عملياتها وقوانينها مثل نظرية الأعداد الرباعية Quatrenions عند روان هاملتون والحساب الهندسي Calcul Géomètrique عند جراسمان ونظرية المجاميع Sets عند جورج كانتور وربما غير ذلك.

إن أهم ما يفرق بين جبر المنطق والجبر المعتاد هو ما أسماه بول قانون الثنائية Law of Duality الذي يقرر أن هناك ثنائية جبرية (ومن ثم جـاء الاسم، كما أسماه أيضاً اللوجستيقيون قانون التوتولوجيا Tautology أو اللغو أو التكرار غير المفيد) بين الجبر العادي وجبر المنطق :

ففي الجبر العادي :

ص + ص = ٢ ص

وكذلك ص × ص = ص^{٢}

بينما في جبر المنطق إذا دلت ص لا على عدد كما في الرياضة وإنما على « فئة » منطقية (Class) كفرقة إطفاء المدينة أو كسكان قطر من الأقطار مثلاً، فإن تكرار هذه الفئة مهما كانت صورته أعني بالجمع أو بالضرب لا يغير شيئاً من الفئة ذاتها إذ تظل كما هي عليه نفس الفئة : أعني نفس فريق الإطفاء

أو نفس سكان القطر . وعلى هذا يكون في جبر المنطق :

ص + ص = ص

ص × ص = ص

وهكذا يساوي الكل جزأه . وهذا تعديل جوهري في قانون التبادل Law of Commutation المعروف في الجبر المعتاد . وكذلك ينحرف جبر المنطق أيضاً عن قانون التوزيع Law of Distribution المعروف في الجبر العادي . والتوزيع الذي يجمع بين الجمع والضرب له صيغتان في جبر المنطق :

(١) ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ

(٢) ا (ب + حـ) = (ا + حـ) (ب + حـ)

والصيغة الأخيرة وحدها تميز جبر المنطق ولا تستقيم في الجبر المعتاد بحيث يمكن وصف هذا الجبر الجديد بأنه نصف توزيعي بالإضافة الى أنه توتولوجي (بالنسبة للتبادل) . وهاتان الخاصتان المميزتان لهذا الجبر من خواص اللوجستيقا أو الحساب المنطقي أياً كان .

لا أريد الاستطراد الى أبعد من هذا في تناول هذا الجبر أكتفاء بالأشارة إلى خصائصه العامة المميزة له . ولقد حقق جبريو المنطق في علمهم هذا حلم ليبنتز في رياضة عامة أو أبجدية عامة فيها تتحول الاستنباطات إلى حساب وقدموا بذلك الأداة الفنية لتحليل النُسق العلمية تحليلاً منطقياً أو أن شيئاً علمياً أيضاً مما أفادت منه المدرسة اللوجستيقية كل الفائدة . ولكن الأبحاث في هذا الجبر قد توقفت في أوائل هذا القرن بمناسبة ظهور اللوجستيقا على المسرح الفكري . وفي الواقع كان جبر المنطق جبراً أكثر منه منطقاً في الكثير

من جوانبه: في طريقة حل مسائله، وفي احتمال تفسير نتائجه تفسيراً مزدوجاً أعني إما عددياً وإما منطقياً. هذا بالاضافة أيضاً الى احتمال التفسير المنطقي نفسه لتفسيرين في آن واحد أحدهما تفسير بالفئات (Classes) والآخر بالقضايا Propositions وهناك فارق كبير بينهما طبعاً . ومن ثم يمكن القول بأن جبر المنطق لم يكن منطقاً إلا بالعرض ، أي بإلزامه تفسيراً منطقياً ليس الوحيد له . وهذا النقص الذريع راجع إلى عدم تكشفه عن «الثوابت» المنطقية الهامة التي بدونها لا يتأكد المعنى المنطقي «كالتضمن» مثلاً .

أما التكشف عن أهم الثوابت المنطقية الضرورية لاستكمال منطق رياضي فيرجع إلى مؤلفين اثنين أحدهما بيانو Peano في إيطاليا وآخرهما فريجه Gottlob Frege في ألمانيا .

أما بيانو فكان أستاذاً لعلم التحليل في جامعة تورينو واهتم بحركة أسس الرياضة وساهم هو وتلاميذه في تأسيس مسلمات الهندسات كما ساهم في آكسيوماتيك العدد . وفيما يختص بدوره في جبر المنطق كان كتابه Formulaire de Mathématiques (١٩٠٤ — ١٩٠٨) أكثر تقدماً من حيث دقة رموزه كما تكشف عن ثوابت لم يعرفها جبر المنطق وأهم من هذا كله أدخل « المتغيرات » Variables في كل صيغ المنطق بحيث أصبح المنطق قادراً تماماً على التعبير عن قضايا الرياضة كلها برموزه وحدها .

أما جوتلوب فريجه فهو منطقي الماني وفي كتبه المتلاحقة عن رموز المنطق وعن أسس الحساب التي امتد صدورها من ١٨٧٩ حتى سنة ١٩٠٣ تفرغ لمسألة أسس الرياضة التي تركها مذهب تحسيب الرياضة عند الأعداد الصحيحة . ورأى أنه يمكن استناداً إلى تعريف للعدد شاع عند رياضيين من أمثال ديدكند

وكانتور أن يرد هذا التعريف الى «ثوابت» المنطق الصوري وحدها بحيث يمكن استنباط الأعداد، ومن ورائها الرياضيات كلها كما رتبها المذهب الحسابي، من مبادىء المنطق الصوري وحده . فكان فريجه بهذا هو الأب الحقيقي لجانب محدد من المذهب اللوجستيقي هو جانب اشتقاق الرياضيات من المنطق . وقد إحتاج هذا العمل منه أن يسلح المنطق نفسه بآلة رمزية دقيقة، وكانت باكورة مؤلفاته عام ١٨٧٩ تكوين هذا المنطق الرمزي، ثم تابع عمله في مؤلفاته الأخرى عن أسس الحساب بأن اشتق الأعداد من المنطق .

إلا أنه لم يكن رياضياً كبيانو مثلاً ففشل حيث نجح بيانو من حيث أن رموزه التي اقترحها للمنطق رغم دقتها البالغة كانت غير رياضية بالمرة ولا طيعة الاستعمال فوق أنها ثقيلة للغاية لأنها تمتد على غير المألوف طولاً وعرضاً مما جعل مؤلفاته بمنأى عن القراء ولم يفد منها لاحق .

هذان التياران : تيار جبر المنطق بالرموز الطيعة مع إدخال المتغيرات مما تمتاز به أعمال بيانو . ثم تيار رد الأعداد التي انتهى اليها المذهب الحسابي كسند أخير للرياضة إلى ثوابت المنطق وحده عند فريجه . هذان التياران التقيا عند برتراند راسل صاحب النظرية اللوجستيقية في أسس الرياضة التي نحن بصددها . ولقد أفاد راسل كل الإفادة من رموز بيانو وأضاف في التحليل المنطقي رموزاً أخرى هامة جداً في حين أنه كان يجهل تماماً أعمال فريجه في اشتقاق الأعداد من حدود المنطق وتصوراته . ولكن شيئاً ما في الجو الفكري آنئذ أملى عليه نفس الفكرة التي بعثت فريجه الى محاولتها . فحاول راسل نفس المحاولة في اشتقاق الأعداد من المنطق بقوة ووضوح نادرين وغير مسبوقين . وتناول هذا الموضوع مباشرة في كتابه الأول Principles of Mathematics الصادر عام ١٩٠٣ ثم مرة ثانية في كتابه بالاشتراك مع هويتهد Principia Mathematica

الصادر في ١٩١١/١٩١٣ . والفارق بين الكتابين هو أن الأول موجه إلى الفلاسفة وحدهم ومن ثم فهو مكتوب بلغة الكلام، أما الثاني فموجه إلى الرياضيين المهتمين بمشكلة أسس الرياضة ومن ثم فهو مكتوب كله بالرموز .

هناك مرحلتان لفهم المذهب اللوجستيقي: الأولى مرحلة فهم أصول هذه النظرية المنطقية بالقدر الذي يسمح بمتابعة فهم موضوع فلسفة الرياضة، والثانية مباشرة اشتقاق الرياضة من هذا المنطق ...

ونبدأ فوراً بالمرحلة الأولى .

(٢٤)

نريد أن نلم سريعاً بهيكل المنطق الرمزي أو على الأصح بأول حساب فيه المسمى « حساب القضايا الأولية » الذي يستند إليه المذهب اللوجستيقي . وطبعاً نلجأ هنا إلى هذا المنطق في صورته التي أصبحت كلاسيكية تماماً بالنسبة إلى كل الأبحاث اللاحقة ، أعني نلجأ إلى واضعه برتراند راسل بادئين بنقطة هامة من كتابه الأول (١٩٠٣) .

فمنذ الصفحة الثالثة من هذا الكتاب يعرض راسل لتصوره الصوري أو المنطقي للرياضة فيخرج بذلك عن المألوف عند الفلاسفة منذ كانط الذي يرد الرياضة الى مـا في تركيبنا الذهـني (أو الحسي بالذات) من حدوس للمكان والزمان تسمح بتركيب الأشكال وإنشاء الأعمال التي تبرر الأحكام التركيبية القبلية للرياضة ، فيبين راسل أنه لا حاجة بنا إلى القول بمثل هذا التركيب الذهني عند بحثنا في طبيعة الرياضة وأسسها ويدعو الى إسقاطه من الاعتبار ، ويؤيده في ذلك أن تقدم الرياضة منذ حركة النقد الباطني فيها إنما

كان على حساب استبعاد كل حدس كما رأينا .

فيقول راسل في تعريفه لتصوره المنطقي لقضايا الرياضة : « إن الرياضيات الخالصة هي مجموعة القضايا التي صورتها دائماً من نوع ل تتضمن م حيث ل، و م قضيتان تشتملان على متغير يبقى بعينه في القضيتين ، وحيث لا تشتمل القضيتان على ثوابت غير ثوابت المنطق » .

ويجب ألا يفزعنا هذا التعريف فهو يريد أن يقول إن قضايا الرياضة الخالصة أشبه بالقضايا الشرطية (وهذا معنى التضمن) التي لا تؤكد شيئاً في عالمنا الخارجي كما هو الشأن في قضايا الرياضة التطبيقية المعبرة مثلاً عن حرارات وسرعات الخ ... وإنما تقول تلك القضايا الشرطية بكل بساطة « إذا » أخذت بالمقدم « فيلزم » عنه التالي ، أعني أنها كلها قضايا افتراضية يتضمن فيها الشرط جوابه دون أدنى اكتراث للوجود الخارجي . هذا واذا حللنا تلك القضايا الشرطية فلن نجـــد فيها غير ثوابت منطقية Logical Constants ومتغيرات (Variables) أعني لن نجـــد غير صور منطقية صرفة لا تقول لنا شيئاً آخر غير المنطق .

إذا فهمنا هذا التعريف أمكننا أن نفهم بسهولة تعريفاً آخر عجيباً للرياضة الخالصة يقول فيه راسل : « الرياضة الخالصة هي العلم الذي لا نعرف فيه قط عم نتحدث ولا إذا كان مـــا نقوله فيهـــا صادقا » . فنحن لا نعرف عم نتحدث لأننا لا نجد فيها غير المتغيرات والثوابت المنطقية دون أدنى مادة أخرى سواء في الخارج أم مادة حدسية في الذهن . ثم نحن لا نعرف إذا كان ما نقوله صادقاً لأن صدق القضايا المستنبطة يتوقف على صدق الفرض أو الشرط وصدق الشرط يتوقف بدوره على القيم المعينة التي تعوض عن

المتغيرات فيه . ولما لم يحدث ذلك التعويض فنحن لا نعلم إذا كان ما نقوله في الرياضة صادقاً .

بعد الفراغ من هذين التعريفين اللذين يباعدان بين تصور راسل المنطقي للرياضة وتصور الحدسيين أتبـــاع كانط من الرياضيين الذين أصروا على قيام الرياضة على نوع من التجربة الذهنية تسمى «الحدس الرياضي» (حدس الأشكال المكانية والأعداد) نركز الكلام فقط على «الصور المنطقية» التي تسمى أيضاً «ثوابت» المنطق .

والصور المنطقية للقضايا والعلاقات المنطقية بينها والتي بواسطتها يتدرج الاستنباط من قضية الى أخرى هي كل موضوع المنطق :

والصورة المنطقية لأية قضية هي الصورة التي تشترك ومثيلاتها فيها . وهناك بالطبع صور منطقية عديدة للقضايا . فليست صورة القضية «سقراط فيلسوف أو رياضي» كصورة القضية «سقراط عاش قبل ارسطو» : فالأولى «قضية منفصلة» كما يقول المناطقة والثانية تعبر عن «علاقة» بين طرفين هي علاقة «عاش قبل» وكلتاهما قضية تختلف عن الأخرى . أن حصر هذه الصور المنطقية للقضايا من أهم ما يميز المنطق الرياضي المعاصر .

أما العلاقات بين القضايا فهي الشروط أو القواعد التي بمقتضاها نستنبط من صدق القضية ل مثلاً صدق قضية أخرى أو قضايا مثل ل ١ ، ل ٢ ، ل ٣ ... ففي منطق القياس التقليدي الذي يقوم على ألفاظ اللغة تنحصر تلك الشروط في قيام حد أوسط يشارك الطرفان في معناه (وإلا استحال القياس) وفي مراعاة الكم والكيف والسلب والإيجاب . أما في المنطق الرياضي وفي أبسط حساب فيه ونقطة بدايته أيضاً المسمى حساب القضايا أو حساب القضايا الأولية (Elementary Calculus of Proposeistions) فلا نظر

في حدود القضايا وبالتالي لا بحث عن حـــد أوسط يشترك الطرفان في معناه فكل هذه الحواجز اللغوية تسقط من الاعتبار ، وإنما تؤخذ القضايا جميعاً كوحدات كل وحدة منها غير منقسمة من داخلها أو محللة الى حدود (كالموضوع والمحمول) كمالا نظر إلى المعنى القاموسي كذلك ؛ ثم يرمز الى كل وحدة بحرف مثل الحرف ل أو م أو ن مهما كان طول القضية ومهما اختلفت القضايا فيما بينها في معانيها القاموسية ، فيحاول ذلك الحساب فقط بأن يحدد علاقات تلازم بين قيم «الصدق والكذب» التي تنسب إلى تلك الوحدات أو القضايا . مثلاً النظرية الخامسة في هندسة أقليدس تلزم عن الرابعة : فإذا كانت الرابعة صادقة (الشرط) فيلزم صدق الخامسة (المشروط) . وعلى عكس ذلك إذا كانت الخامسة كاذبة (المشروط) فيلزم كذب الرابعة (الشرط). وإذن فهنا استنباط أو علاقة استنباطية بين قضيتين ليس بينهما اشتراك في المعنى اللغوي لأن كل نظرية تتحدث عن شيء مختلف وإنما فقط على أساس قيمتي الصدق والكذب فقط اللتين يمكن نسبتهما إلى كل منهما .

القضايا — أو صورها — التي تعالج في حساب القضايا الأولية هذا محدودة العدد، والعلاقات الاستنباطية بينها تتوقف على ما لها من قيمتين هما الصدق والكذب . أما رموزها التي اصطلح عليها راسل والتي أصبحت اصطلاحاً دولياً وتقليدياً في كل المؤلفات فهي كما يأتي :

(١) الحروف اللاتينية إبتداء من حرف p يدل كل واحد منها على قضية موجبة . ونحن نصطلح بديلاً عربياً لها الحروف ابتـداء من حرف ل . وعلى ذلك فان ل بمفردها تدل على قضية موجبة وتقرأ « ل صادقة ».

(٢) فإذا أدخلنا على ل علامة ~ للنفي . دلت ~ ل على قضية سالبة وتقرأ « ل كاذبة » .

(٣) وإذا أدخلنا بين قضيتين ل، م العلامة $\vee$ دلت القضية ل $\vee$ م على قضية منفصلة (الجمع المنطقي).

(٤) فإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة $\supset$ دلت ل $\supset$ م على أن الأولى تتضمن الثانية بمعنى أن صدق الثانية يلزم عن صدق الأولى.

(٥) وإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة . دلت ل . م على أن القضيتين متصلتان (الضرب المنطقي).

(٦) وإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة = دلت ل = م على أن القضيتين يتساويان صدقاً أو كذباً .

ولما كان يجب ألا نقبل في المنطق الرياضي حداً جديداً إلا إذا أمكن رده إلى حدود سبقت معرفتها فيه، وألا نقبل فيه قضية إلا إذا ارتدت بالبرهان إلى مسلمات أو قضايا سبق برهانها ، أعني لما كان هذا المنطق يجب أن يتكون في صورة نسق استنباطي بالمعنى الذي سبق أن شرحناه، وذلك لكي نطمئن الى سلامة خطوات اشتقاق الرياضة منه، فإن راسل اختار في كتابه بالاشتراك مع هويتهد حدين أوليين اثنين من تلك الصور السابقة هما النفى والفصل ليعرف بالاشتقاق على أساسهما الحدود الباقية ، كما اختار خمس مسلمات (أو قوانين من المنطق) تسمح بأن نشتق منها بالبرهان كل القوانين المنطقية الأخرى.

فإذا وضعنا أمامنا النفي والفصل كحدين أوليين فسنحصل على التعريفات الآتية للعلامات المشتقة منها للتضمن والفصل والمساواة :

تعريف التضمن ل $\supset$ م = — ل $\vee$ م

تعريف الوصل ل . م = — (— ل $\vee$ م)

تعريف المساواة   ل = م = (ل c م) . (م c ل)

أما المسلمات التي قبلها للنظرية المنطقية فهي :

(١)   (ل ٧ م) c ل

(٢)   م c (ل ٧ م)

(٣)   (ل ٧ م) c (م ٧ ل)

(٤)   (ل ٧ (م ٧ ن)) c (م ٧ (ل ٧ ن))

(٥)   (م c ن) c ((ل ٧ م) c (ل ٧ ن))

وعلى أساس هذه المسلمات الخمس يبرهن راسل كل القضايا المنطقية التي تستعمل الحدود السالفة الذكر فإذا تم البرهان اعتبر القضية المبرهنة قانوناً (أو كما يقول توتولوجيا) من قوانين المنطق. وقد أربت تلك القوانين المبرهنة على أكثر من خمسمائة قانون للمنطق لا يمثل القياس التقليدي منها غير قانونين اثنين من ذلك العدد الضخم، وهكذا اتسع المنطق الرياضي لعدد ضخم من قوانين الاستنباط المنطقي التي حصرها المنطق القليدي في ضروب وأشكال القياس الضيقة، فأصبح بذلك المنطق قادراً على استيعاب الاستنباطات الرياضية المعقدة الكثيرة.

بعد أن أوجزنا أهم العناصر التي يستند إليها حساب القضايا الأولية يبقى بيان كيفية إجراء الحساب أو الأستنباط. وغرض الحساب هو أثبات أن صيغة ما من المنطق هي قانون (أي توتولوجيا) فيه بمعنى أنها صيغة دائماً صادقة مهما عوضنا من قيم محددة بدلاً عن المتغيرات فيها. وبرهان كل قضية منطقية على هذا النحو ابتداء من المسلمات أو مما سبق أن اشتق منها بالبرهان ضمان لعدم الاستناد الى بداهة أو حدس حسي أو أية مغالطة أخرى

وهو أمر ضروري لهذه النظرية المنطقية التي تحتاج إلى الحذر الشديد من قبول عنا صر غير منطقية في الوقت الذي أخذت فيه على عاتقها اشتقاق الرياضة منها وأثبات أنها منطق وحسب .

وفي كل فرع من فروع الرياضة توجد قواعد عملية لاشتقاق النظريات من المسلمات . وفي حساب القضايا الأولية الذي نحن بصدده هناك قاعدتان :

القاعدة الأولى قاعدة التعويض : وهي قاعدة تقول إنه يمكن في أية صيغة من المنطق أن يعوض عن رمز فيها مثل ل حيثما وجد بصيغة أخرى تعادله صدقاً أوكذباً. مثلاً في الصيغة ل ٧ — ل (وتقرأ ل أما صادقة وأما كاذبة) يمكن التعويض عن ل بالصيغة نفسها على الوجه الآتي :

(ل ٧ — ل) ٧ — (ل ٧ — ل)

القاعدة الثانية قاعدة الاستنتاج وهي قاعدة مستعملة في العلوم الرمزية وإن لم يكن مصرح بها ومؤداها أنك إذا علمت أن أ وكذلك أ ⊃ ب من قوانين المنطق، فإنك تستطيع أن تستنتج ثبوت ب بمفردها كقانون أيضاً ويمكن وضع هذه القاعدة في الصورة الرمزية الآتية :

أ

أ ⊃ ب

―――――

ب

وهذه القاعدة كما يدل مؤداها هي التي تسمح بالانتقال أو التدرج من المقدمات الى نتائجها .

إن هذا الموجز لخطوات حساب القضايا يمكن الآن فقط أن يتوج بمثال للبرهان على أن الصيغة الآتية مثلاً هي قانون أوتوتولوجيا منطقية :

(ل ⊂ م) ⊂ ((م ⊂ ن) ⊂ (ل ⊂ ن))

وخطوات البرهان على هذه القضية عند راسل كما يأتي :

وفقاً لتعريف التضمن (ل ⊂ م) = (– ل ∨ م)

يعوض – ل بدلاً من ل وكذلك – م بدلاً من م في المسلمة الرابعة مع التعويض عن التضمن بتعريفه نحصل على الصيغة الآتية :

((– ل) ∨ (– م ∨ ن)) ⊂ ((– م) ∨ (– ل ∨ ن))

وبتطبيق تعريف التضمن نفسه على هذه الصيغة نحصل على :

(ل ⊂ (م ⊂ ن)) ⊂ (م ⊂ (ل ⊂ ن)) . . . . (١)

ثم بتعويض – ل بدلاً من ل في المسلمة الخامسة وباستعمال التعريف بدلاً من علامة التضمن نحصل بنفس الطريقة على الصيغة الآتية :

(م ⊂ ن) ⊂ ((ل ⊂ م) ⊂ (ل ⊂ ن)) . . . . (٢)

ثم بتعويض م ⊂ ن بدلاً عن ل، ثم ل ⊂ م بدلاً عن م ، ثم ل ⊂ ن بدلاً عن ن في الصيغة (١) نحصل على :

((م ⊂ ن) ⊂ ((ل ⊂ م) ⊂ (ل ⊂ ن)))

⊂ ((ل ⊂ م) ⊂ ((م ⊂ ن) ⊂ (ل ⊂ ن))) . . . (٣)

وهي صيغة من النوع أ ⊃ ب حيث أ هو الصيغة (٢) التي بينا أنها توتولوجيا فالقاعدة الثانية وهي مبدأ الاستنتاج يسمح باستنتاج أن الصيغة (٢) وهي :

(ل ⊃ م) ⊃ ((م ⊃ ن) ⊃ (ل ⊃ ن))

هي أيضاً توتولوجيا وهو المطلوب برهانه . وهكذا يبرهن راسل على أكثر من خمسمائة قضية أو قانون منطقي في هذا الحساب .

لقد أغفلنا هنا ما كان يمكن أن يقال من تحسينات لاحقة في هذا الحساب ومن تعليقات نقدية واكتفينا بما هو ضروري لفهمه . وليس هو الحساب الوحيد إذ يأتي بعده حساب الدوال القضائية التي ترد إليها دوال الرياضة وفي هذا الحساب تحلل القضية الى موضوع ومحمول . ثم يـأتي بعد ذلك حساب الفئـات Calculus of Classes ثم حساب العلاقات Calculus of relations وكلاهمـا يتصلان فيما بينهما كما يتصلان معاً باشتقاق قضايا العدد ، وهنا في هذه المرحلة لا نعرف – على حد تعبير راسل – متى انتهى المنطق ومتى بدأت الرياضة . ولقد اكتفينا بحساب القضايا الأولية لأنه كالقاعدة التي يبنى عليها البناء المنطقي كله باعتباره نسقاً استنباطياً .

(٢٥)

لننتقل الآن إلى جوهر النظرية اللوجستيقية التي ترجع الى جو تلوب فريجه في القرن الماضي وإلى برتراند راسل في القرن العشرين وأعني بذلك اشتقاق الرياضة (أو بالأحرى اشتقاق «الأعداد» التي ارتدت اليها الرياضة كلها في المذهب الحسابي) من المنطق الصوري وحده .

ولما كان هذا البحث موجهاً إلى الفلاسفة دون الرياضيين فإننا سنتحاشى كل تعقيدات فنية في استعراضنا لراسل فلا نلجأ إلى الصيغ الرمزية إلا في أضيق نطاق ونكتفي بشرح مقاصد النظرية مع التعليق عليها بتمهيدات ومقارنات وتوضيحات تقربها .

نحن نعلم الآن أن راسل عرّف الرياضة الخالصة بأنها « فئة تلك القضايا التي صورتها ل تتضمن م حيث ل و م قضيتان تشتملان على متغير يبقى هو هو بعينه في القضيتين وحيث لا تشتمل على ثوابت غير ثوابت المنطق » :

ونقول الآن إن مثل هذا التعريف يبرز الخصائص الآتية : الرياضة « صورية » و « قبلية » و « استنباطية » مما يؤكد كون موضوعات الرياضة ليست بالضرورة كميات تتعلق بالمكان والحركة والزمان . وما استبعاد الكم على هذا النحو إلا النتيجة الحتمية للتطور الذي وصفناه للرياضة نفسها عند أصحابها في غضون القرن الماضي من «تحسيب» للرياضة استبعد الحدس في كل صوره وخاصة المكانية ، ثم من امتداد لفكرة العدد لتشمل اللامتناهي (كانتور) وأيضاً من اكسيوماتياك للعدد أحاله الى قضايا منطقية (بيانو) وأخيراً من نقائض رياضية إحتاجت إلى حلول منطقية .

هذه التطورات المتلاحقة في اتجاه نحو المنطق بالذات هو الذي هيأ تماماً الى إلتحام الرياضة بالمنطق والتوحيد بينهما في نسق موحد عند راسل . وفي نطاق هذا النسق الموحد إذا شئنا إن نعرّف كلاً منهما على حدة فلا نجد إلا عبارة راسل الأخرى التي تقول : « إنهما لا يختلفان إلاّ كما يختلف الصبي عن الرجل . فالمنطق هو صبا الرياضة والرياضة رجولة المنطق » . ذلك لأن النسق الموحد يبدأ بحساب القضايا الأولية ثم يتدرج منه الى حساب القضايا

الحملية وعندما ينتقل الى حساب الفئات وحساب العلاقات يتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى تناول الحساب العددي منتقلاً منه الى بقية فروع الرياضة كما نسقها المذهب الحسابي الذي له الفضل الأول في إمكان تسلسل الرياضة كلها إبتداء من العدد الصحيح. وإذن فنحن هنا لا نستطيع أن نقول أين انتهى المنطق واين ابتدأت الرياضة.

إن السؤال الأول والهام الذي نبدأ منه فهم هذه النظرية هو هل التعريف الذي بدأنا منه للرياضة صادق؟ هل يمكن تعريف الموضوعات الرياضية كلها بواسطة ثوابت المنطق واشتقاق قضايا الرياضة من قوانين المنطق وحده؟

هذا السؤال الهام — بفضل النتيجة التي وصل اليها المذهب الحسابي في رد الرياضة الى العدد الصحيح — يمكن ان يُرَدّ عند اللوجستيقيين إلى سؤال أبسط منه وهو: هل يمكن رد الحساب الى المنطق أي تعريف الأعداد بواسطة ثوابت المنطق؟ هذا تبسط كبير للسؤال الأول يسّره ووطأه المذهب الحسابي نفسه. فلنبدأ إذن من الأعداد. ولكن أي أعداد؟

إن سلسلة الأعداد الطبيعية التي يعتبرها الرياضيون أساس البناء الرياضي كله هي تلك العملية التي لا تنتهي لمتابعة أعداد صحيحة منتهية تبدأ بالصفر ثم بالواحد الخ... إن الصفر لم يكن عدداً حتى اكتشفه الخوارزمي. والقدماء لم يعتبروا الواحد عدداً فأفلاطون يبدأ العدد من ٢ وكذلك أرسطو لأنه يوحد بين الموجود والواحد فيقول إن الواحد مساوق للموجود أو اسم آخر له يمكن أن يتبادل معه فهو ليس عدداً. وبعض المحدثين ينكرون أيضاً كون الصفر عدداً. ولكن ليس هناك أدنى صعوبة الآن في أن نعتبر مع اللوجستيقيين أن سلسلة الأعداد تبدأ بالصفر ثم تتدرج الى الواحد الخ...

من جهة أخرى كل واحد من تلك الأعداد البادئة من الصفر يمكن أن نعتبره إما معبراً عن عدد الأشياء وأما معبراً عن ترتيب الأشياء أو درجتها في داخل سلسلة، والاعتبار الأول هو الأهم والأولى، لأن ترتيب الأعداد أو مكانتها داخل سلسلة ما إنما هو عملية تالية لادراكنا الاعداد كلها على حدة، إذ يجيء بعد ذلك ترتيبها حسب الأكبر والأصغر والمساوي. وإذن فالأعداد المسماة المرتبة (Ordinal) إنما تأتي بعد الأعداد المسماة الأساسية أو العادة (Cardinal) . ومن ثم يتحول السؤال السابق المبسط عند اللوجستيقيين الى سؤال أخير محدد هو : هل يُرَدُّ العدد العاد الى المنطق ؟

لنرجع الآن الى تلك الفترة التي نشأ فيها هذا السؤال عند جوتلوب فريجه في العقدين الأخيرين من القرن الماضي .

في ذلك الوقت كان يرى بعض الرياضيين أن التساؤل عما هو العدد الذي انتهى إليه المذهب الحسابي تساؤل غير مقبول لأن العدد واضح وحدسي وربما لا سبيل إلا إلى القول بأنه هبة من الله (كرونكر) .

رياضيون آخرون قالوا إن الأعداد مجرد رموز أو علامات (Signs) ، وهي إما علامات لإجراء عمليات حسابية فتسجل الأعداد نتائج العمليات (هاينكل Haenkel) وإما علامات لا معنى لها إطلاقاً ولا تزيد على مجرد كونها علامات وحسب(الاسميون) .

آخرون قالوا إنها موضوعات سيكولوجية أي معبرة عن عملية تجريد سيكولوجي من مواقف تجريبية بحتة فتكون الأعداد منتزعة مباشره من تجاربنا .

أما جوتلوب فريجه وهو أول اللوجستيقيين فيقول إنها موضوعات منطقية صرفة .

فيما يختص بالنظرة الأولى القائلة بأن الأعداد واضحة الى حد أنه لا يجب إثارة سؤال عن طبيعتها فهي نظرة يرفضها الواقع التاريخي القريب للرياضة حيث أن الرياضيين رأوا ضرورة متابعة تحليل فكرة العدد (عند الأكسيوماتيكيين مثلاً) الى مسلمات تنتجها .

أما فيما يختص بالاسميين **Nominalistes** الذي اعتبروا الأعـــداد مجرد علامات أو ترقيمات، نقول إنهم بذلك يتكلمون عن أشياء لها خصائص هي قطعاً غير خصائص الأعداد . فالعلامات المبصرة من حيث هي كذلك هي من عالم الأشياء الطبيعية والكيميائية ، فهي ترسم على أنحاء مختلفة باختلاف اللغات ، وتكتب وتمحى وترفع وتوضع وتجمع وتفرق الى آخر ما هنالك خضوع لقوانين الطبيعة والكيمياء مما يخلو قطعاً من الخصائص المميزة للأعداد ذاتها: كخاصية كون العدد دائماً هو هو رغم اختلاف علاماته، وكخاصية كونه في ذاته علاقة ثابتة بالنسبة لما قبله ولما بعده بينما العلامة لا تتضمن تلك العلاقة ، وكخاصية ثبات هويته عند دخوله على أنحاء لا تنتهي في التركيبات العددية . وإذن فرغم أن اختيار علامات الأعداد هام في الرياضة إلا أنه يجب ألا نخلط بين العدد وهو معنى وبين كتابته أو عـــلامته المادية .

كذلك يجب ألا نخلط بين ذلك المعنى الذي ميزناه وبين الأفكار السيكولوجية التي تثار في ذهن الفرد عند مشاهدته للأشياء المتجمعة في فئات أو عند رؤيته بالعين العلامات العددية المكتوبة . إن تلك الأفكار السيكولوجية حالات ذاتية وتختلف من فرد إلى آخر ومن لحظة إلى أخرى ، ومن ثم فليست الأعداد ظواهر نفسية وكيفيات سيكولوجية نظراً لما فيها من دقة وموضوعية .

وإذن فلم يبق إلا أن ننسب الأعداد إلى نوع رابع من الأمور غير ما

تقدم ذكره أعني الى « الصور المنطقية » ، وهذا بالضبط هو ما أبرزه في آن واحد تصور العدد عند جورج كانتور ، وتعريفه عند فريجه ثم عند راسل، إذ يكاد يتفق الثلاثة على تعريف واحد للعدد .

إن فريجه المنطقي الذي عاصر كانتور الرياضي ولم يطلع عليه كان على علم بتمييز تقليدي في المنطق بين المفهومات أو المقصودات الأوائل وبين المفهومات أو المقصودات الثواني : مثلاً عندما أتصور انساناً أو مثلثا أو حركة فهذه التصورات مفهومات أوائل أي معبرة أو دالة على تلك الأشياء التي يتصورها الفهم بداءة . ولكن إذا قلت عن تلك المفهومات انها إجناس أو أنواع أو كليات أو جزئيات أو تصورات أوقضايا فهذه أوصاف لاحقة للمقصودات الأوائل ومن درجة ثانية بالنسبة إلى الأشياء وليست معبرة أو دالة عليها . هذه هي المقصودات الثواني التي هي موضوع المنطق بالذات .

وكذلك الشأن في العدد عند فريجه : فالأشياء متفرقة ومجتمعة لها معانيها الأوائل المباشرة ، فمثلاً هذا إنسان وتلك شجرة الخ ... ولكنها في أنفرادها وفي تجمعها لها صفات أخرى غير مفهوماتها الأوائل وتلزم عن نظرنا في صفة ما مشتركة من صفات مفهوماتها. تلك مفهومات أخرى غير مفهوماتها الأوائل نلتفت إليها بعقلنا ونصل اليها بعملية تجريد عقلي وتلك هي أعدادها . فالأعداد ليست تصورات مباشرة أو أوائل وإنما هي تصورات من درجة ثانية عن تصورات مباشرة ، هي إلتفات أو تجريد لصفات مشتركة بين تصورات أوائل ، إذ يجب أن تكون هناك أولاً تصورات الأشياء المتفرقة والمجتمعة في فئات لكي تكون هناك بعد ذلك تصورات عددية للفئات .

إنه إبتداء من وجهة نظر كهذه توصل أيضاً جورج كانتور في نظريته

في « المجاميع » الى فهمـــه للعدد كأسس أو قوى (Powers, Puissance)
فحسب بالنسبة لتصورات الأشياء ، أعني كتصورات كلية تكونت بالتجريد
العقلي لصفة ما عندما تجتمع الأشياء في فئات أو مجموعات . وبالطبع مجموعات
كثيرة مختلفة يمكن أن تؤدي بمثل هذا التجريد الى نفس التصور الكلي أي
نفس العدد عندما « تتساوى » المجموعات فيما بينها أي عندما نلتفت الى
صفة مشتّركة ومتماثلة كالمساواة القائمة بين مختلف تصورات الفئات المعروضة
علينا . هذا هو تصور جورج كانتور للعدد حيث نلاحظ أن تصوره للعدد
كأسس أو قوى هو عين تصور جوتلوب فريجه للعدد كمقصود ثان أي كتصور
مجرد عن تصور أول .

بهذه المناسبة وقبل أن ننتقل إلى راسل نتوقف قليلاً عندما يسمي التعريف
بالتجريد Definition by Abstraction الذي يكمن وراء تلك الآراء ويؤدي
الى هذا التصور للعدد كمقصود ثان أو كأسس وقوى . فهناك من أنواع
التعريف الممارسة في العلم والرياضة ما يسمى بهذا الاسم ، وبمقتضاه نعرّف
الأشياء مهما اختلفت وتضاربت بواسطة صفة مشتّركة بينها نلتفت إليها
ونعزلها عزلاً عقلياً لاغراض العلم : فقد يختلف جسمان في حجمهمـــا
وشكلهما ومادتهما ولكنهما « يتساويان » وزناً فبعزل صفة المساواة أو بتجريدها
نقول إننا نعرّفهما بالتجريد . مثال آخر للتعريف بالتجريد ما قبله أقليدس
في مسلمته الخامسة ؛ فقولك الخط ا يوازي الخط ب إنما معناه إننا حددنا
أوعرفنا الخطين بأن انتزعنا معنى جديداً مشتّركاً هو أن أتجاه أ يساوي إتجاه
ب . وبذلك تكون مسلمة أقليدس تعريفاً بالتجريد .

إن التعريف بالتجريد متصل بتحليل « العلاقة » Relation وبتعريف
العدد عند راسل . فهو يسمي « علاقة متعدية » Transitive Relation

تلك العلاقة التي إذا فرضنا قيامها بين أ ، ب ، حـ فإنها تقوم كذلك بين أ ، حـ ومثل هذه العلاقة أعم من علاقة « المساواة » Equality وتشملها . مثلاً علاقات أ ب أو ابن أو « اكبر من » كلها علاقات متعدية ولكنها ليست كالمساواة قابلة للإنعكاس أو للرجوع على الأعقاب . مثلاً إذا كان أ أباً لـ ب فان ب ابن لـ أ وليس أباً له . بينما المساواة قابلة للعودة أو الانعكاس فهي علاقة سيمترية أو متسقة Symetrical كما يصطلح راسل . إذن المساواة هي في آن واحد علاقة متعدية وسيمترية . إن العلاقة التي تجمع في آن واحد التعدي والسيمترية يسميها راسل التماثل أو التشابه Similitude . ولهذا اللفظ الذي يظهر في حساب العلاقات أهمية خاصة في تعريف راسل للعدد بما لا يخرج جملة عن تصور فريجه وكانتور . ونحن نثبت فيما يلي تفكير راسل برموزه بين قوسين كبيرين لانها مسألة فنية بحتة يمكن للقارىء أغفالها .

[إذا فهمنا هذه الإشارات السريعة ثم وضعنا نصب أعينا الرموز الآتية التي يستعملها راسل في تعريفه للعدد وهي :

NC الاعداد العادة

Nc العدد العاد

Cl فئـــة

Sim تماثل — مشابهة

D هو هو بعينه

فإننا نقول إن راسل الذي تأثر بكانتور يرى مثلاً أن العدد « ثلاثة » هو فئة Cl ولكنه ليس فئة لأشياء ، أي ليس منتزعاً مباشرة من الأشياء بحيث يكون المقصود الأول منها ، وإنما هو فئة لفئات كثيرة متشابهة Sim فيما بينها بالثلاثية . بعبارة أخرى نعرف العدد ثلاثة بالتجريد لفئة مشتركة أو

متماثلة بين فئات كثيرة وهذه الفئة المتماثلة هي علاقة متعدية سيمترية . إذن العدد ثلاثة هو فئة كل الفئات المماثلة لـ a مثل الفئة B فيكتب بالرمز

$$Nc \quad 'a' = \hat{B} \; (B \; sma)$$

يجيء من هذا التعريف الآتي لأي عدد منفرد (ونحن نذكر رقم القضية في كتابه بالاشتراك مع هويتهد) .

$$*\ 100.01 \quad Nc = \overrightarrow{sm} \quad Df.$$

الذي يقول ان أي عدد عاد هو بالتعريف فئة الفئات المتماثلة

(Cardinal number is a class of Classes Similar to one another)

ثم يجيء التعريف الآتي للعدد العاد جملة

$$*100.02 \quad NC = D' Nc \quad Df.$$

وفئة العدد العاد جملة هي فئة لجميع الأعداد العادة المنفردة ولذلك نقرأ التعريف كما يأتي :

فئة الأعداد العادة NC إنما هي فئة لفئات (D) كل الفئات المتماثلة Nc .

(The Class of Cardinal numbers is the Class of the Classes which are Similar to one another).

إذن هناك أولاً فئات الأشياء ، ثم هناك فئات أو أعداد منفردة لتلك الفئات الأولى ، ثم أخيراً هناك فئة عامة لكل تلك الأعداد وهي سلسلة العدد العاد .

ثم ينتقل راسل بعد ذلك إلى تعريف الصفر فالواحد ، ثم الجمع والضرب فتتكون بذلك سلسلة الأعداد العادة . وفيما يختص بالعددين المذكورين يعطي راسل التعريفين الآتيين بالرموز ونحن نترجمها كما يأتي :

الصفر هو الفئة التي عضوها الوحيد هو فئة الخلو (Nul class) .

الواحد هو فئة كل الفئات ذات العضو الواحد .

ثم يبرهن راسل على عدد كبير من قضايا الحساب على أساس عمليّ الجمع والضرب المستمدين من مقابلهما في الحساب المنطقي (الوصل والفصل) ثم يتدرج بعدذلك الى استنباط كل فروع الرياضة وقضاياها كما وردت مسلسلة في المذهب الحسابي الذي له الفضل في تيسير مهمة اللوجستيقيين] .

والآن دون أن نسترسل الى أبعد من هذا في تقصي موقف راسل في اشتقاق الرياضة الذي طابعه الأول الدقة الفنية مما يتجاوز حدود عرضنا هذا نود أن ننتقل فوراً إلى مناقشة قيمة الموقف اللوجستيقي .

وأول كل شيء نتنبه إلى أن التعريفات المتتابعة في هذا المذهب لها أهمية كبرى تفوق أهمية اشتقاق النظريات كما يشهد بذلك تعريف العدد أو أي ثابت منطقي آخر مما ذكرنا نموذجاً له . ومن ثم يجب أن نلاحظ ما يأتي على التعريفات .

أنها تبدو في بادىء الأمر ذات قيمة فنية بحتة لأن وظيفتها إنما هي إدخال رمز مختصر جديد هو «الحد» الذي يراد تعريفه بدلاً من مجموعة مطولة من الرموز التي سبقت معرفتها في النسق نفسه وهي التعريف .

ولكن في حقيقة الأمر إذا نظرنا إلى التعريفات من جهة مضمونا تها أو

معانيها فإنها تصبح ذات أهمية أبعد خطراً سواء من حيث توكيدها لأهم المعاني أو الأفكار التي يدور حولها النظر في النسق المنطقي الرياضي الموحد أم من حيث تحليل تلك المعاني أو الأفكار التي يحملها الرمز الجديد تحليلاً دقيقاً محدداً لا نحصل عليه في أي قاموس أو علم آخر وذلك كما تشهد به الرموز المطولة التي تعرّف الرمز الجديد وتضع تحليلاً لمعناه .

وإذن ففلسفياً التعريفات هنا ذات أهمية كبرى في حين أن استنباط القضايا أو النظريات الرياضية هو أمر أقل أهمية فلسفياً بل وفنياً إذ قد ذلل ذلك الأمر وعبد طريقه من قبل المذهب الحسابي الذي سلسل قضايا الرياضة تسلسلاً بديعاً ونهائياً .

وحتى إذا كان هناك خطأ ما في استنباط قضية رياضية في نسق راسل فإننا نستطيع أن نطمئن إلى صدق القضية ذاتها استناداً إلى المذهب الحسابي . على كل حال استنباط القضايا أقل أهمية من تعريفات النسق الجديدة التي تعبر بلغة المنطق عن أمور لم تكن في المذهب الحسابي منطقية أو صورية .

هذا ثم إن الاختيار الحر من بين الرموز الكثيرة الواردة في النسق لطائفة محددة محصورة نعرّف بها رمزاً جديداً (الحد الذي يطلب تعريفه) هو أمر أكثر من مجرد عمل قاموسي إذ هو أعسر عمل في تكوين النسق الاستنباطي من حيث أن ذلك الاختيار إنما يتطلب تبصراً نافذاً بموضوعات النسق وفهماً دقيقاً لأهدافه ولأحسن الطرق المحققة لها .

وهنا أيضاً نلاحظ أن كل تعريف جديد من التعريفات المتتابعة في داخل النسق إنما هو أمر يحدد بالدقة المرحلة التي وصل إليها النسق في طريقه الطويل نحو هدفه ، كما أن خير وصف لذلك الطريق الطويل في أية مرحلة من مراحله إنما هو معرفة التعريف الذي يميز تلك المرحلة بحيث نحسم في كل مسألة

تثار إذا كان يمكن أن تجاب إيجاباً أم سلباً في حدود مرحلة معينة من التعريفات .

كل هذا الكلام في إبراز أهمية التعريفات في النسق الموحد هو لتركيز الانتباه في أهمية تعريف العدد الذي جاء به راسل في النسق اللوجستيقي والذي سبق ذكره . فالمسألة الآن هي هل هذا التعريف للعدد الذي بواسطته انتقل النسق الموحد من المنطق الى سائر أجزاء الرياضة يقبل التبرير فيصبح منطقياً أو فلسفياً غير قابل للطعن أو الرفض وأنه يطابق الموضوعات المعروفة في الرياضة باسمه وانه لا يطابق إلا هذه الموضوعات وحدها ؟

فيما يختص بالتعريف الأخير الخاص بالعدد العاد في عمومه (المرقوم برقم 02 . 100 من العسير أن يتردد أحد في قبوله لأنه يؤكد بكل بساطة أن فئة العدد هي فئة جميع فئات الأعداد العادة .

أما فيما يختص بالتعريف الأول (المرقوم برقم 01 . 100 فقد وجهت اليه إعتراضات نناقشها الآن لنتبين مدى إمكان تبرير التعريف .

فابدأ أولاً بالقول بأن الرياضي هاوسدورف (Hausdorff) قال إن تصور فئة لكل الفئات الخ ... هو تصور غير مقبول لأنه يقود إلى تناقض منطقي معروف هو أن مثل هذا التصور يشمل نفسه أو مدلوله كجزء من نفسه إذ أن « فئة » لكل الفئات هي نفسها عدد أيضاً . لقد رأينا أن لمثل هذا الاعتراض نظيراً عند راسل على نظرية جورج كانتور ولذلك نتركه هنا لمن ينظر في حل نقائض تلك النظرية الرياضية فهناك نجد المحاولات المختلفة لتخطي تلك العقبة .

ثانياً يعترض الرياضي مولدرب Molderup في مقال له في الحولية الرياضية Math . Annal بأن ذلك التعريف متناقض في ذاته من حيث

أنه يجعل العدد ١ هو فئة كل الأشياء في الوجود ، بمعنى أنه يندرج تحته كل شيء من حيث أنه مفرد . ولكن لا أرى في ذلك أي تناقض فإن أرسطو كما رأينا جعل الواحد مساوقاً للموجود ، ويتبادلان (أي الواحد والموجود) بذلك الدلالة على الشيء الموجود ولم يطعن أحد بتناقض أرسطو .

ثالثاً يعترض الرياضي Welstein في دائرة معارف الرياضة (١٩٠٩) بأن عدد فئة ما لا يمكن أن يعتبر فئة كل الفئات المماثلة لفئة ما من حيث أن هذه الفئة الأخيرة غير معروفة لنا . وهنا نلاحظ أنه ليس ضرورياً أن نعرف كل أعضاء فئة ما لكي نصل الى تحديد أو تعريف تلك الفئة . وكل ما نحتاج إليه هو أن تكون لدينا وسيلة أو طريقة لنقطع فيما إذا كان موضوع ما هو عضو أم لا لتلك الفئة . مثلاً فئـــة الشكل الكثير الأضلاع هي منطقياً فئـــة يمكن تبريرها تمامـــاً من حيث أن تعريف الشكل الكثير الأضلاع يمدنا بوسيلة أو طريقة لنبت في أية لحظة فيما إذا كان موضوع ما هو كثير أضلاع أم ليس كذلك . إذن فالاعتراض المذكور يتبدد لأن تعريف العدد يعطينا طريقة للبت فيما إذا كان أمامنا عدد دون أن يعين عدداً بالذات من الأعداد الفردية . إذ أن هذه تأتي تعريفاتها بعد ذلك كما وضحنا ذلك فيما يختص بالصفر والواحد .

هذه إعتراضات وجدناها في طريقنا على تعريف راسل ونتبين من مناقشتها ما يبرر تماماً تعريفه للعدد ، كما وجدنا أيضاً ما يبرر اتجاهه هذا في تعريف العدد من قبله عند كانتور وعند فريجه .

ولقد قصدنا أبراز الأهمية الفلسفية لتعريف العدد بالذات في النسق اللوجستيقي وكذلك التعريفات الأخرى ، لأنه إذا كانت هناك أهمية خاصة نعلقها على ما أنجزه هذا النسق من تقدم فإن هذه الأهمية لا تستمد من اشتقاق

النظريات الرياضية بالبرهان فهذا الاشتقاق كما قلنا كان قد يسره وعبده المذهب الحسابي من قبل ، وكل ما أضافه المذهب اللوجستيقي هنا هو تعبيره بثوابت المنطق أو صوره عما كان معبراً عنه فقط برموز الرياضة ، في حين قد بقي تسلسل قضايا ونظريات الرياضة بعضها من بعض على النحو الذي تركه عنده المذهب الحسابي . لكن لم يكن يتيسر هذا التعبير المنطقي للرياضة إذا لم يوفق المنطق إلى تعريفاته الجميلة المتلاحقة التي بها يتمثل المنطق كل تصورات الرياضة ويذيبها فيه وعلى رأسها تعريف العدد الذي وقفنا عنده لأهميته لأنه القنطرة التي يعبرها المنطق الى سائر أجزاء الرياضة . ومن ثم نرى أن التعريفات اللوجستيقية وهي من عمل اللوجستيقا لا من المذهب الحسابي إنما هي الأمر الهام « علمياً » في هذه الفلسفة العلمية التي تبطن وراءها فلسفة كاملة هي أن الرياضيات من طبيعة منطقيـــة وحسب وليس لها مادة مستقلة عن ثوابت المنطق أو صوره .

-(٢٦)-

نريد أن نلقي الآن نظرة سريعة على المذهب الأكسيوماتيكي الذي هو رد فعل مباشر على المذهب اللوجستيقي من إمام الرياضة المعاصرة ديفد هلبرت الذي كان استاذاً بجامعة برلين حتى قبيل اندلاع الحرب العالمية الثانية وهو لا يرى أن الرياضة فرع من المنطق ومشتقة منه كما انتهى اليه اللوجستيقيون وإنما يرى أن المنطق والرياضة نبعا كلاهما متوازيين عن نبع واحد أسبق منهمـــا هو الطريقـــة الأكسيوماتيكية (Axoimatic Method) أو كمـــا يقال أحياناً نبعا عن صورية خـــالصة (Pure Formalism) هي الأساس المشترك والبعيد لهما معـــاً . ولبيان ذلك نقول إنـــه لكي تستقيم الرياضة

والمنطق معاً كعلمين استنباطيين (Deductive Sciences) وثيقين يجب الذهاب إلى ما هو أبعد من حدودهما ومسلماتها الأولية التي وصلت إليها الأبحاث السابقة عند بيانو وفريجه وراسل ومن مهد لهم في تحليل الرياضة والمنطق إلى حدودهما ومسلماتها الأولية من أمثال مورتز باش وديدكند وغيرهم .

وهذا الذهاب إلى ما وراء الحدود والمسلمات الأولية في المنطق والرياضة كلاهما إنما ينتهي الى، أو على الأصح يبدأ من قبول حدود ومسلمات أولية أخرى عارية من كل معنى سواء في الرياضة أم في المنطق لأنها مجرد رموز نضعها وضعاً ومن ثم فهي صورية بحتة لا تتضمن معنى ما . وتلك الحدود والمسلمات التي لا هي الى الرياضة ولا هي الى المنطق هي التي تسمى « الأكسيوماتيك » اللذي تشتق منه بالتوازي وفي آن واحد الرياضة والمنطق منفصلين .

ولوضع الأكسيوماتيك على طريقة هلبرت شروط هامة مشهورة أجملنا ذكرها فيما سبق أن قلناه عن شروط تأسيس المسلمات في الهندسة وهي شروط الاستقلال والاشباع وعدم التناقض التي لا تزال قيد الدراسة ولم تصل فيها الأبحاث بعد إلى قول فصل .

ولما كان الأكسيوماتيك وما يثيره من أبحاث في شروط وضعه من الأمور التي لا تدرس في كل من المنطق والرياضة ولا يدخل في موضوع أي منهما فقد اصطلح هلبرت على تسمية كل تلك الأبحاث الأكسيوماتيكية بما وراء الرياضة (Metamathematics) تارة وبما وراء المنطق (Metalogic) تارة أخرى ، فتكوّن بذلك علم أو بحث جديد يجتذب الباحثين ويمهد للدراسات المنطقية والرياضية معاً .

ولا بد أن نلاحظ أن هذه النظرية الأكسيوماتيكية من حيث هي « صورية » تتفق – أو بتعبير أصدق – تتجاوب مع حركة عامة مضاهية

لها في العلوم الطبيعية نحو تجريد أكبر وصورية متزايدة يصحبهما ليس فقط دقة في التحقق التجريبي من النظريات العلمية بل كذلك عدم معقولية متزايدة للتصورات المستعملة في العلم . فالطبيعيات الحديثة لا تميل إلى تفسير العالم ولا الى أن تصفه وإنما بدلاً عن ذلك كله تهدف الى استعراض بنيانه فقط (Structure) باستعمال الرموز التي لا معنى لها أي لا تعقل وهي منفصلة بعضها عن بعض بقدر ما تعقل فقط عند الارتباط بعضها مع البعض في معادلات تبين استعمالها وبالتالي معانيها . إن هذا الميل المتزايد من علماء الطبيعة نحو الإهتمام بالبنيان الرمزي للعلم وما تتضمنه الاقترانات المختلفة للرموز من معان، له صداه أو قل له شبيهه عند هلبرت وتلاميذه من الأكسيوماتيكيين المعاصرين الباحثين في أسس الرياضة .

إن هذا المذهب ، مذهب الصورية البحتة هو مسألة فنية صرفة أولاً ، ثم هو بعد ذلك فلسفة أن استطعنا أن نسمي فلسفة القول المجمل بـأن هناك أصلاً مشتركاً للمنطق والرياضة معاً . أما بيان ذلك الأصل المشترك فهو المسألة التي وصفناها بأنها فنية صرفة . وبرنامج هذه المسألة الفنية يبدأ بإقامة نسق رمزي من الحدود والمسلمات الأولية تشتمل على رموز للدوال الرياضية والأعداد كما تشتمل على رموز لثوابت وقوانين من المنطق .

ويبدأ النسق بحساب للقضايا يستعمل الرموز التي عرفناها عند راسل مع مسلمات للتضمن والوصل والفصل والنفي والمساواة والعدد . ولقد جاء عدد تلك المسلمات كبيراً جداً بالقياس إلى مسلمات منطق راسل التي سبق ذكرها وسبب ذلك أن مسلمات النسق الجديد إنما قصد بها شيء أكثر من مجرد إقامة المنطق وحده إذ يجب أن يحسب فيها حساب الأعداد أيضاً .

ويجب أن نلاحظ أن هذا المذهب أكثر صورية في الواقع من المذهب

اللوجستيقي لأنه يبدأ من مسلمات « اسمية » بحتة أي مجرد رموز لا تعني المنطق أو الرياضة، ولكنه مع ذلك لا يختلف كل الاختلاف عن المذهب اللوجستيقي كما أراد له صاحبه هلبرت ، إذ هو في الواقع يكمله ويزيد من دقته ، لأنه لم يفعل إلا أن أوضح أمكان الذهاب في تكوين الحدود والمسلمات الأولية إلى ما وراء المنطق، ذلك المنطق الذي وقف عنده راسل . هذا ثم إن الأكسيوماتيك كما نراه عند هلبرت وتلاميذه يحتاج الى قدر من المنطق قبل أن تستنبط منه قوانين المنطق لأنه أحد شروط تأسيسه هو أن لا تتناقض المسلمات فيما بينها وعدم التناقض هذا من أهم قوانين المنطق . فالمنطق إذن مفروض مقدماً في كل محاولة اكسيوماتيكية من هذا النوع ولذلك يرى المنطقيون أن هذا المذهب مكمل فقط للمذهب اللوجستيقي ومعمق له .

لكن هناك أيضاً إعتراضات وجيهة على هذا المذهب يقول أحدها أن هذا المذهب بدلاً من أن يعالج مسألة عدم تناقض الرياضيات مباشرة أعني بدلاً من معالجة نقائض الرياضة الحديثة في نطاق الرياضة القائمة فعلاً إتجه الى اختيار مسلمات بعيدة تنتج الرياضيات والمنطق سوياً، بينما هي لا معنى لها في ذاتها لأنها مجرد رموز خاضعة لقوانين اقترانانها التي تحددها المسلمات، كما أن مجرد اختيارها دون غيرها تظل مسألة غيبية وربما ترجع الى حدس رياضي بعيد أملى ذلك الاختيار دون غيره في الوقت الذي تريد فيه الصورية البحتة لكي تبرر اسمها أن تستبعد احتمال دخول أي حدس في الفكر الرياضي والقضاء على مجرد إمكان ظهوره .

بقي التيار الثالث المعاصر في مشكلة أسس الرياضة وهو المذهب الحدسي (Intuitionism) أو المذهب الحدسي الجديد (Neo — Intuitionism) الذي يعتنقه رياضيون من أمثال بروور Brouwer وفايل Weyl وهيتنج Heyting في ألمانيا وجيل أقدم منهم من أمثال بوانكاريه Poincaré ولوبيج Lebesge وبير Baire في فرنسا ، وغير هؤلاء ممن ائتلفوا على معارضة المذهب اللوجستيقي وحده (مثل أولئك الرياضيين الفرنسيين الذين ذكرتهم) أو على معارضة المذهبين اللوجستيقي والأكسيوماتيكي معاً (مثل هؤلاء الرياضيين الألمان الذين سبق ذكرهم) .

وهو مذهب لا يمكن إغفاله رغم أنه رياضي بحت ، لأنه مذهب فريق من أجلاء الرياضيين المعاصرين الذين يعنيهم الأمر في كل بحث يدور حول علمهم الرياضي العريق ، ولأنهم يعودون بعلمهم إلى أصول غير منطقية هي الأصول التي كانت (من قبل حركة النقد الباطني التي طردت كل حدس من الرياضة) من تقاليد الرياضة في عصور نموها عبر القرون .

وهم في جملتهم يعنون « بالحدس » لا البداهة الديكارتية وإنما المعنى الكانطي للكلمة أي تلك التجربة الحسية أو الذهنية التي يبيحها المكان والزمان وهي التجربة التي تقابلها وتناظرها التجربة المعملية في العلوم الطبيعية . فهم إذن رياضيون يقولون إن الرياضة لها « مادة » معينة وإذن فهي ليست صورية بحيث تشتق من المنطق الصوري وإن تلك المادة إنما تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هي الحدس الرياضي . ذلك الحدس التجريبي القبلي الذي هو السبيل الوحيد إلى الكشف الرياضي وإلى تأسيس الرياضة كعلم أصيل مستقل عن

المنطق والأكسيوماتيك معاً . وما المنطق والأكسيوماتيك في نظر هؤلاء إلا الوسيلة العلمية اللاحقة « لاستعراض » أو « شرح » أو « بسط » تلك الكشوف والتجارب الرياضية الأصيلة في صورة واضحة يفهمها الآخرون الذين لم يكتشفوها . فهناك إذن فرق واضح بين مناهج الرياضة وبين عرض الرياضة وتقديمها الى الآخرين . فالمنابع تجريبية أي حدسية أما العرض اللاحق للتجربة أي للحدس فهو منطقي أو أكسيوماتيكي .

هذا هو المذهب الحدسي كما يستخلص من فلسفة قدماء الحدسيين من أمثال كانط وبوانكاريه وغيرهما مما يطلق على مذاهبهم « المذهب الحدسي » وحسب .

أما المذهب الحدسي الجديد فهو مذهب المعاصرين، بروور وفايل وهيتنج ، الذين تعمقوا فكرة الحدس الرياضي بحيث أخرجوا من الرياضة كل ما لا ينبىء عنه ذلك الحدس ، كما تجنبوا في علمهم كل النقائض (Paradoxes) والأخطاء التي وقعت فيها الرياضة الحديثة بسبب الحدس نفسه . فأعطوا كلمة الحدس معنى خاصاً وضيقاً يميز مذهبهم « الحدسي الجديد » عن المذهب الحدسي عامة . ومذهبهم فيه قلق مبهم ويختلف من مؤلف إلى آخر فلا توجد له وحدة بينهم إلا في القول الغامض بأن « الرياضة متحدة بالجزء المضبوط للفكر » (Methematics is identical with the exact part of our thought) . وهم يقصدون بهذا أن الفكر إذا كان أحياناً « مضبوطاً » بالغ الدقة فهذا هو موضوع الرياضة وموضع الحدس الرياضي . فهم إذن يواجهون الرياضة من زاوية سيكولوجية ويقربون من موقف كانط والحدسيين جملة من جهة اختلاط الرياضة بمادة فكرية ما . وإذا كانت الرياضة عندهم هي الجزء المضبوط من الفكر فهي لا تفترض كأساس لها أي

علم آخر حتى ولو كان ذلك العلم هو المنطق كما يريد اللوجستيقيون . وهؤلاء اللوجستيقيون واقعون في خطأ الدور حين يدعون تطبيق نظريات المنطق كوسيلة للبرهان في الرياضة ذلك لأن تلك النظريات كما يتضح من المنطق في صورته اللوجستيقية أو الأكسيوماتيكية هي نفسها محتاجة في تكوينها إلى تكوين الرياضة اولاً ، لأنها تحتاج إلى فكرة الفئة (Class) وفكرة الترتيب (Order) وما ينشأ عنها من تسلسل الأعداد وغير ذلك من الأفكار الرياضية ، وإذن إذا كانت الرياضة بهذا المعنى أولى وغير مقيدة بأي علم آخر حتى ولو كان المنطق نفسه فلا يبقى من منبع لها غير « الحدس » الذي يقدم لنا التصورات الرياضية والاستنباطات الرياضية كأمور أصيلة مباشرة واضحة في ذاتها . وهذا الحدس إن هو إلا المقدرة على معالجة بعض تصوراتنا واستنباطاتنا التي تحدث في تفكيرنا العادي معالجة منفصلة (Separate) ومضبوطة (Exact) ودقيقة .

تلك الكلمات التي وصفنا بها المذهب الحدسي الجديد مقتطفة من هايتنج (A. Heyting في بحث له في مجلة Erkenntnis سنة ١٩٣٢ بعنوان الأسس الحدسية للرياضة) الذي يضيف أيضاً كخاصية من خواص المذهب الحدسي الجديد أن الأمور التي هي موضوع الرياضة هي أمور مستقلة عن التجربة الخارجية (الحسية) كما أنها ليست صورية بالمرة ، ولكنها مع ذلك هي أمور « موضوعية لا توجد مع ذلك إلا في الفكر » .

بعد هذه اللمحة في طبيعة هذا المذهب نلاحظ أن تطبيقه أدى بمعتنقيه إلى نتائج مؤسفة للغاية في نظر بعض الرياضيين والفلاسفة ووخيمة العاقبة على علم كالرياضة ذي تاريخ حافل مجيد : فقد بدا هذا العلم منذ مجهودات المذهب الحسابي علماً استكمل تنسيقه ووحدته . ولكن أنصار هذا المذهب

الحدسي الجديد قطعوا أوصاله بعد تلك الوحدة التي أقامها المذهب الحسابي ، وأخرجوا الكثير من أجزائه الهامة باعتبار أنها ليست من الرياضة في شيء ولا ينبيء عنها الحدس ، ومثال ذلك الأعداد الدائرة والأعداد اللامتناهية وبعض الدوال التحليلية حتى نظرية المجاميع (كانتور) التي هي أطرف وأعمق اكتشافات الرياضة في عصورها الأخيرة لما جاءت به من حلول عجيبة في عمومها لمشاكل اللامتناهي التي اصطدم بها الفكر البشري منذ فجره . فتبقى بعد ذلك أجزاء متناثرة لا يمكن جمعها بعضها إلى بعض في نسق موحد لتسمي الرياضة . ومن جهة أخرى اضطر أنصار هذا المذهب الحدسي الجديد الى أن يلجأوا الى المنطق الصوري الجديد في كل أبحاثهم بحيث يبدو نقدهم للصلة بين الرياضة والمنطق في مأزق لا مخرج منه لأنهم يرفضون المنطق كأساس من جهة ثم هم يلجؤون اليه من جهة أخرى لاقامة نظريتهم . ولقد امتشق هلبرت مرة أخرى قلمه ليفند طرائقهم ونتائجهم ويردهم إلى الطريقــة الأكسيوماتيكية عنده .

وهكذا نختتم مع بوانكاريه بأنــه لا سبيل الى التوفيق بين هــذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة لأنه لا يمكن التوفيق بين منطقيين وتجريبيين ، بين ذوي العقلية الكانتورية وذوي العقلية غير الكانتورية ، بين من سماهم وليم جيمس ذوي العقول الرقيقة وذوي العقول الخشنة . والله أعلم ، والحمد لله رب العالمين .

مراجع مختارة

Aristote : Analytique séconde

Beth, E.W. : Les fondements de Matematique, Louvin 1950.

Black, M. : The Nature of Mathematics, New York 1952.

Brouwer, L.E.J. : Intuitionism and formalism, Bulletin of Am. Math. Soc. Vol. xx, 1913.

Brunschvicg, L. : Les étapes de la philos. Mathem. Paris.

Carnap, R. : Foundations of logic and Mathematics, International Encyclopedia of Unified Science, 1/9 Chicago 1939.

Chivistek, L. : New foundations of Formal Mathematics, Journal of Symb. logic, 1938.

Colerus, B. : De Phythagore à Hilbert, Paris 1936

Couturat L. : 1) l'infini mathematique, Paris 1896

2) La logique de Loibniz d'après des documents inédits, Paris 1901

Darbon : La philosophie Mathematique de B. Russell, Paris (Alcan).

Gonseth, F. : Les Fondements des Matematiques, Paris 1926.

Heyting, A. : Intuitionism, An Introduction, Amsterdam, 1956.

Jourdain, Ph. : Foundation of Math., Journal of Math. 1930.

Kleene, S.C. : 1) A theory of positive integers in formal logic, Am. Jour. of Math, 1935.

2) Introduction to Mathematics, New York 1952.

Nicod, J. : A reduction in the Number of the primitive Propositions of logic, Proc. Cam. Philos. Soc., Vol. XIX, pp. 32-41

Peano, G. : Formulaire de Mathematique, Turin 1893-1908.

Poincaré, H. : Science et Methode, Paris 1908.

Ramsy, F.P. : The foundation of Mathematics, Kegon Paul 1931.

Russell, B. : 1) Principles of Mathematics, Cambridge 1903.

Introduction to Math. Philosophy, London, 1919.

Russell & Whitehead : Principia Mathematica, 3 vols. Cambridge 1910-1913.

Tannery, J. : De la methode dans les sciences; ch. sur les math.

Tarski, A. : Introduction to Mathematical logic, 1938.

فهرس تحليـــلي للموضوعات

والمصطلحات والاعلام باللغة العربية

(أ)

(ب)

(ت)

(ث)

(ج)

(ح)

(خ)

(د)

(ق)

(ك)

(ل)

(م)

(ن)

(و)

فهرس المصطلحات والاعلام(1)

باللغات الاوروبية

A

(1) الاعلام بالحروف الكبيرة .

Axiome	أصل موضوع ، علوممتعارفة،مسلمة .
Axiome d'ordre	مسلمات أو أصول خاصة بالترتيب
Axiome de reductibilité	مسلمة الرد أو الارجاع
Axiome de selection	مسلمة الانتقاء

B.

BAIRE	بيـر
BELTRAMI	بلترامي
BOLL, Ferdinand	بول (فرديناند)
BOLZANO	بولزانو
BOOLE, George	بول (جورج)
BRAHMAGUPTA	براهماجوبتا
BRUNSCHVICG	برنشفج

C.

Calcul	حساب
CANTOR	كانتور
Caracteristique universelle	أبجدية عامة
Cardinal number	عدد عاد أو أساسي
Class	طائفة أو فئة
COLERUS	كوليروس
COLLINGWOOD	كولنجوود
Commutation	تبادل المواضع
Complex number	عدد مركب
COMTE	كونت
Concepts dérivés	تصورات مشتقة (بالتعريف)

Concepts primitifs	تصورات ابتدائية
Congruence	مطابقة
Constant	ثابت ــ مستمر
Construction	انشاء ، عمل
Continu	متصل
Continuité géométrique	اتصال هندسي
Continuous deformation	تشويه مستمر
Continuum	اتصال
Convergente	متجمع
Coordinates	الاحداثيان
Courbe	منحني الدالة
COUTURAT	كوتوراه
CROCE	كروتشي
Curve	منحني الدالة

D

D'ALEMBERT	دالامبير
DEDEKIND	ديدكند
Deductive science	علم استنباطي
Deductive system	نسق استنباطي
Definition by abstraction	تعريف بالتجريد
Demonstrative science	علم برهاني
Deplacement	نقلة
DESCARTES	ديكارت
Differentiation	تفاضل (حساب)
DILTEY	دلتـي
DIOPHANTE	ديوفانت
DIRICHELET, Lejeune	ديرشليه (لوجين)
Discontinuité	انفصال
Discontinuous function	دالة منفصلة
Doctrine arithmetisante	المذهب الحسابي

DRYFUS	دريفوس
DURKHEIM	دوركيم

E.

Elementary calculus of propositions	حساب القضايا الاولية
Elements	الاصول
Enoncé	منطوق
ENRIQUES	انريكس
Entier	العدد الصحيح
Equality	مساواة
Equivalence	معادلة
Erkenntnis	مجلة علمية
EUCLIDE	اقليدس

F.

Finite number	العدد المنتهي
Fonction	دالة
Fonction analytique	دالة تحليلية
Formal	صوري
Formalism	صورية
Foundation of mathematics	أسس الرياضة ، اصولها
Function	دالة

G.

GAUSS	جوس
Géomètrie analytique	هندسة تحليلية
Geometry of situation	هندسة الوضع
GOBLOT	جوبلو
GRASSMANN	جراسمان

H.

HADAMARD	هادامار
HAENKEL	هاينكل
HALSTED	هلشتد
HAMILTON, Rowan	هاملتون (روان)
HANTIGTON	هنتجتون
HAUSSDORFF	هاوسدورف
HEGEL	هيجل
HERMITE	هرميت
HILBERT	هلبرت
Homogène	متجانس
Hypothèse	فرض

I.

Identite	ذاتية ، هوية
Imaginary number	عدد تخيلي
Implication	تضمن
Inclusion	احتواء
Incommensurables	الاعداد أو الابعاد غير المتقايسة
Independence	استقلال
Independance ordonnée	استقلال مرتب
Induction mathématique	استقراء رياضي
Induction par reccurence	استقراء بالتكرار
Infini	لامتناهي
Infinite number	عدد غير متناهي
Integer	عدد صحيح
Integration	تكامل (حساب)
Intuition	حدس ، بداهة
Intuition empirique	حدس تجريبي

Intuition spaciale	حدس مكاني
Intuitionism	المذهب الحدسي
Irrational number	العدد الأصم
Isomorphe	لا كيف له

J.

JAMES, W.	جيمس (وليم)
JEVONS	جيفنز
JOURDAIN, Ph.	جوردين (فيليب)

K.

KANT	كانط
KLEENE	كلين
KLEIN, F.	كلاين (فيلكس)
KONIG	كونج
KRONECKER	كرونكر

L.

LAGRANGE	لاجرانج
LALANDE	لالاند
LANDEAU	لاندو
Law of association	قانون الاشتراك او الاقتران
Law of distribution	قانون التوزيع
Law of duality	قانون الثنائية
LEBESGUE	لوبيج
LEGENDRE	لوجاندر
Relation	علاقة

LEVI, Beppo	ليفي (ببو)
Limite	حد
LOBATCHEVSKI	لوباتشفسكي
Localisation	تعيين المكان
Logistic	لوجستيقا أو المنطق الرياضي
Logistic theory	المذهب أو النرظاية اللوجستيقية
Logistica numerosa	حساب الاعداد
Logistica speciosa	حساب الحروف (الجبر)
Logistique	لوجستيقا

M.

MARX	ماركس
Methematical logic	المنطق الرياضي
Mathématique universelle	الرياضة العامة
MAUSS	موس
MENON	مينون
MERAY	ميراي
Mesure	قياس
Metalogic	ما وراء المنطق
Metamathematics	ما وراء الرياضة
Metrical geometry	هندسة قياسية
Méthode génétique	طريقة تكوينية أو توليدية
Methodology	علم مناهج العلوم
MOLDERUP	مولدروب

N.

NEWTON	نيوتن
NICOD	نيكود

Nominalists	اسميون
Non-euclidian geometries	هندسات غير اقليدية
Non-metrical geometries	هندسات غير قياسية
Neo-intuitionism	المذهب الحدسي الجديد

O.

Order	نظام ، ترتيب
Ordinal	عدد مرتب
Ordre	نظام ، ترتيب

P.

PADOA	بادوا
PASCH	باش
PEANO	بيانو
PEIRCE, Ch. S.	بيرس (شارل ساندرس)
Permutation	تبادل المواضع
PIERI	بييري
PLATON	افلاطون
Philosophy of natural sciences	فلسفة العلوم الطبيعية
Philosophy of physical sciences	فلسفة علوم الطبيعة
Philosophy of sciences	فلسفة العلوم
PHYTAGORE	فيثاغور
POINCARÉ	بوانكاريه
Postulat	مسلمة ، مصادرة
Postulat implicit	مسلمة مضمرة
Postulational system	نسق المسلمات
Projective geometry	هندسة اسقاطية
Projective transformation	تحويل اسقاطي

Proposition	قضية
Powers	قوى ، أسس
Puissances	قوى ، أسس
Pure Formalism	صورية بحتة أو خالصة

Q.

Qualitative geometry	هندسة كيفية
Quantité impossible	كم مستحيل
Quaternions	الاعداد الرباعية

R.

Reflexion	انعكاس
RHIND	رند
REIMANN	ريمان
RENAN	رينان
Rotation	استدارة ، دوران
RUSSELL	راسل

S.

SACCHERI	ساكيري
SCHRODER	شرويدر
Signs	علامات
Space	مكان
Symbolic	رمزي
Symbolic logic	منطق رمزي
Synthèse	تركيب
Système catégorico — déductif	نسق يقيني استنباطي
Système hypothético — déductif	نسق فرضي استنباطي

T.

TANNERY, J.	تانري
TAURINUS	توريونس
Tautology	توتولوجيا ((قانون الهوهو))
Théorème	نظرية
Theoria	مجلة
Théorie des ensembles	نظرية المجاميع
Theory of cut	نظرية القطع
Theory of functions	نظرية الدوال
Theory of groups	نظرية المجموعات
Theory of limit	نظرية الحد
Theory of set	نظرية المجاميع
Time	الزمان
Transfinite number	العدد غير المتناهي ، اللامتناهي
Transformation	تحويل

V.

VAILATI	فيلاتي
Variable	متغير
Variante	متغير
Vecteur libre	متجه حر
VEBLEN	فبلن
VENN	فن
Vérité externe	حقيقة خارجية
Vérité interne	حقيقة باطنة
VIETE	فييت

W.

WEBER	فبر
WEIERSTRASS	فيرستراس
WELSTEIN	فلشتين
WEYL	فايل

Z.

ZENON	زينون
ZEUTHAN	تزيتن

فهرس الفصول

الصفحات

الصفحات